§ 6. Некоторые общие свойства ортогональных полиномов

Классические ортогональные полиномы обладают целым рядом свойств, которые вытекают непосредственно из свойства ортогональности этих полиномов. Такими свойствами обладают любые полиномы, ортогональные на интервале (a, b) с произвольным весом $\rho(x) > 0$.

Перейдем к рассмотрению некоторых общих свойств полиномов $p_n(x)$, ортогональных на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$. При этом будем предполагать, что коэффициент при старшей степени полинома $p_n(x)$ является вещественным и отличен от нуля (n — степень полинома).

1. Разложение произвольного полинома по ортогональным полиномам. Покажем, что *произвольный полином n-й степени $q_n(x)$ можно представить в виде линейной комбинации ортогональных полиномов $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, т. е.*

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{kn} p_k(x). \tag{1}$$

При $n = 0$ это утверждение очевидно. Для произвольного $n > 0$ доказательство проведем по индукции. Пусть для любого полинома $q_{n-1}(x)$ справедливо разложение

$$q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n-1} p_k(x). \tag{2}$$

Для полинома $q_n(x)$ подберем постоянную c_{nn} таким образом, чтобы коэффициент при старшей степени полинома $q_n(x) - c_{nn}p_n(x)$ был равен нулю, т. е. $q_n(x) - c_{nn}p_n(x) = q_{n-1}(x)$. Если использовать разложение (2), то для $q_n(x)$ получим разложение (1).

Коэффициенты c_{kn} в (1) легко определить с помощью свойства ортогональности

$$\int_a^b p_n(x)\, p_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n, \tag{3}$$

по формуле

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b q_n(x)\, p_k(x)\, \rho(x)\, dx, \tag{4}$$

где

$$d_k^2 = \int_a^b p_k^2(x)\, \rho(x)\, dx.$$

Докажем, что соотношение ортогональности (3) эквивалентно соотношению

$$\int_a^b p_n(x)\, x^m \rho(x)\, dx = 0, \qquad m < n. \tag{5}$$

Действительно, если в интеграле (3) при $m < n$ воспользоваться разложением полинома $p_m(x)$ по степеням x, то из соотношения (5) получим (3). Аналогично, разлагая x^m по ортогональным полиномам $p_k(x)$, из (3) получим (5).

Из соотношения (5) вытекает, что *полином $p_n(x)$ ортогонален произвольному полиному меньшей степени.*

2. Единственность системы ортогональных полиномов при заданном весе. Можно показать, что *задание интервала (a, b) и веса $\rho(x)$ определяет полином $p_n(x)$, удовлетворяющий соотношению ортогональности* (5), *однозначно с точностью до нормировочного множителя.*

Предположим, что существуют два полинома $p_n(x)$ и $\tilde{p}_n(x)$, удовлетворяющие соотношению (5). Имеем

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{kn} p_k(x).$$

В силу соотношений (4), (5) $c_{kn} = 0$ при $k < n$, откуда и вытекает пропорциональность полиномов $p_n(x)$ и $\tilde{p}_n(x)$.

Для полиномов $p_n(x)$ справедливо следующее явное выражение в виде определителя:

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1} & C_n & \dots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где A_n — нормировочная постоянная, $C_k = \int_a^b x^k \rho(x)\,dx$ — момент весовой функции $\rho(x)$. В самом деле, легко проверить, что полиномы (6) удовлетворяют соотношению ортогональности (5) *).

Из явного вида полиномов $p_n(x)$, задаваемого формулой (6), ясно, что *полином $p_n(x)$ является полиномом с вещественными коэффициентами.*

Пример. Как известно, система функций $\{\cos n\varphi\}$ обладает свойством ортогональности:

$$\int_0^\pi \cos n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = 0, \qquad m \neq n.$$

С помощью соотношения

$$\cos (n+1)\varphi + \cos (n-1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos n\varphi,$$

используя метод математической индукции, легко показать, что

*) Коэффициент при x^n в выражении (6) отличен от нуля при $A_n \neq 0$, так как он пропорционален определителю Грама для функций $1, x, \dots x^{n-1}$ (см. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, 1971).

функция $\cos n\varphi$ является полиномом степени n относительно переменной $x = \cos\varphi$ с коэффициентом при старшей степени $a_n = 2^{n-1}$ $(a_0 = 1)$. Этот полином называется *полиномом Чебышева первого рода* $T_n(x)$. Переходя в соотношении ортогональности для системы функций $\{\cos n\varphi\}$ к новой переменной интегрирования $x = \cos\varphi$, получим следующее соотношение ортогональности для полиномов $T_n(x)$:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \qquad m \neq n.$$

Отсюда видно, что полиномы $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos\varphi$ удовлетворяют тому же соотношению ортогональности, что и полиномы Якоби $P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x)$. Поэтому в силу свойства единственности ортогональных полиномов при заданном весе имеем

$$T_n(x) = C_n P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x).$$

Сравнение коэффициентов при x^n дает $C_n = \dfrac{n!}{(1/2)_n}$.

Если использовать формулу дифференцирования (5.6) для полиномов Якоби, то можно выразить *полиномы Чебышева второго рода*

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}$$

через полиномы $P_n^{(1/2,\,1/2)}(x)$:

$$U_n(x) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2,1/2)}(x).$$

3. Рекуррентные соотношения. *Для произвольных ортогональных полиномов имеет место рекуррентная формула, связывающая три последовательных полинома* $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$:

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \tag{7}$$

где α_n, β_n, γ_n *— некоторые постоянные.*

Для доказательства воспользуемся разложением

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{kn} p_k(x). \tag{8}$$

Согласно (4)

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b p_k(x)\, xp_n(x)\, \rho(x)\, dx. \tag{9}$$

Так как функция $xp_k(x)$ — полином степени $k+1$, то в силу свойства ортогональности полинома $p_n(x)$ коэффициенты c_{kn}

равны нулю при $k+1<n$. Поэтому (8) можно записать в виде

$$xp_n = \alpha_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \gamma_n p_{n-1},$$

где $\alpha_n = c_{n+1,\,n}$, $\beta_n = c_{nn}$, $\gamma_n = c_{n-1,\,n}$, что и требовалось доказать.

Таблица 2

Коэффициенты рекуррентных соотношений

$y_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$L_n^{\alpha}(x)$	$H_n(x)$
α_n	$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$-(n+1)$	$\frac{1}{2}$
β_n	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$2n+\alpha+1$	0
γ_n	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$	$-(n+\alpha)$	n
$\widetilde{\alpha}_n$	$-n$	0	0
$\widetilde{\beta}_n$	$\frac{(\alpha-\beta)n}{2n+\alpha+\beta}$	n	0
$\widetilde{\gamma}_n$	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}$	$-(n+\alpha)$	$2n$

Коэффициенты α_n, β_n, γ_n можно выразить через квадрат нормы d_n^2 и коэффициенты a_n, b_n при старших степенях полинома

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots, \quad a_n \neq 0.$$

Из соотношения (9) видно, что $d_k^2 c_{kn} = d_n^2 c_{nk}$. Так как $\alpha_{n-1} = c_{n,\,n-1}$, $\gamma_n = c_{n-1,\,n}$, то, полагая $k = n-1$, получаем

$$\gamma_n = \alpha_{n-1}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \tag{10}$$

С другой стороны, сравнивая коэффициенты при старших степенях в левой и правой частях равенства (8), имеем $a_n = \alpha_n a_{n+1}$, $b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n$. Отсюда

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \tag{11}$$

Таким образом, зная коэффициенты a_n, b_n и квадрат нормы d_n^2 произвольных ортогональных полиномов $p_n(x)$, можно последовательно определить эти полиномы.

Коэффициенты α_n, β_n, γ_n, вычисленные по формулам (11) для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита, приведены в табл. 2. Кроме того, в табл. 2 приведены коэффициенты $\widetilde{\alpha}_n$, $\widetilde{\beta}_n$, $\widetilde{\gamma}_n$, входящие в формулу дифференцирования

$$\sigma(x)\, y_n'(x) = (\widetilde{\alpha}_n x + \widetilde{\beta}_n)\, y_n(x) + \widetilde{\gamma}_n y_{n-1}(x).$$

Эта формула получается с помощью подстановки выражения для $y_{n+1}(x)$ из рекуррентного соотношения (7) в формулу дифференцирования (5.7).

Рассмотрим теперь рекуррентное соотношение вида (7)

$$zu_n(z) = \alpha_n u_{n+1}(z) + \beta_n u_n(z) + \gamma_n u_{n-1}(z) \tag{7a}$$

для произвольных комплексных значений z. Одним из решений этого соотношения являются полиномы $p_n(z)$, ортогональные на интервале (a, b) с весом $\rho(z)$. Другим решением при $z \notin [a, b]$ являются функции

$$q_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s)\,\rho(s)}{s - z}\, ds.$$

Для доказательства достаточно проинтегрировать на интервале (a, b) рекуррентное соотношение для полиномов $p_n(s)$, предварительно умножив его на $\rho(s)/(s - z)$, и воспользоваться равенством

$$\int_a^b \frac{sp_n(s)\,\rho(s)}{s - z}\, ds = \int_a^b \left(1 + \frac{z}{s - z}\right) p_n(s)\,\rho(s)\, ds =$$

$$= \int_a^b p_n(s)\,\rho(s)\, ds + z \int_a^b \frac{p_n(s)\,\rho(s)}{s - z}\, ds = zq_n(z), \qquad n \geqslant 1.$$

С функцией $q_n(z)$ тесно связана функция

$$r_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s) - p_n(z)}{s - z}\, \rho(s)\, ds.$$

Эта функция является, как нетрудно видеть, полиномом степени $n - 1$. Ее называют *полиномом второго рода*. Так как при $z \notin [a, b]$

$$r_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s)\,\rho(s)}{s - z}\, ds - p_n(z) \int_a^b \frac{\rho(s)\, ds}{s - z} = q_n(z) - \frac{1}{a_0} p_n(z)\, q_0(z)$$

и, кроме того, функции $p_n(z)$ и $q_n(z)$ при $z \notin [a, b]$ удовлетворяют одному и тому же соотношению (7a), то этому же соотношению удовлетворяют и полиномы $r_n(z)$. В силу непрерывности полиномы $r_n(z)$ будут удовлетворять соотношению (7a) и при $z \in [a, b]$.

4. Формула Дарбу — Кристоффеля. Из рекуррентного соотношения (7) непосредственно вытекает *формула Дарбу —*

Кристоффеля

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)\,p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{p_{n+1}(x)\,p_n(y) - p_n(x)\,p_{n+1}(y)}{x-y}, \qquad (12)$$

играющая важную роль в теории ортогональных полиномов. Для ее вывода воспользуемся (7) и (10):

$$xp_k(x) = \alpha_k p_{k+1}(x) + \beta_k p_k(x) + \alpha_{k-1}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}\,p_{k-1}(x),$$

$$yp_k(y) = \alpha_k p_{k+1}(y) + \beta_k p_k(y) + \alpha_{k-1}\frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}\,p_{k-1}(y).$$

Эти рекуррентные соотношения справедливы и при $k=0$, если положить $\alpha_{-1}/d_{-1}^2 = 0$, $p_{-1}(x) = 0$.

Умножим первое рекуррентное соотношение на $p_k(y)$, второе на $p_k(x)$. Разделим каждое соотношение на d_k^2 и почленно вычтем. Это дает

$$(x-y)\,\frac{p_k(x)\,p_k(y)}{d_k^2} = A_k(x,y) - A_{k-1}(x,y),$$

где

$$A_k(x,y) = \frac{\alpha_k}{d_k^2}\,[p_{k+1}(x)\,p_k(y) - p_k(x)\,p_{k+1}(y)].$$

Производя суммирование по k, получим

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k(x)\,p_k(y)}{d_k^2} = A_n(x,y).$$

Эта формула, очевидно, эквивалентна (12), так как $\alpha_n = a_n/a_{n+1}$.

5. Свойства нулей. Докажем, что *все нули x_j полинома $p_n(x)$ являются простыми и находятся на интервале (a, b).*

Пусть полином $p_n(x)$ при возрастании x меняет знак k раз на интервале (a, b). Очевидно, что $0 \leqslant k \leqslant n$. Рассматриваемое свойство будет действительно иметь место, если доказать, что $k = n$. Положим

$$q_k(x) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \prod\limits_{j=1}^{k}(x - x_j), & 0 < k \leqslant n. \end{cases}$$

Здесь x_j — точки, при переходе через которые полином $p_n(x)$ меняет знак. Произведение $p_n(x)q_k(x)$, очевидно, не меняет знака при $x \in (a, b)$. Поэтому

$$\int_a^b p_n(x)\,q_k(x)\,\rho(x)\,dx \neq 0.$$

Отсюда следует, что $k = n$, так как при $k < n$

$$\int_a^b p_n(x)\, q_k(x)\, \rho(x)\, dx = 0$$

в силу (5).

Можно доказать, что *нули полиномов $p_n(x)$ и $p_{n+1}(x)$ перемежаются.* Для доказательства рассмотрим частный случай формулы Дарбу — Кристоффеля, получающийся из (12) предельным переходом при $y \to x$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k^2(x)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \left[p'_{n+1}(x)\, p_n(x) - p'_n(x)\, p_{n+1}(x) \right]. \tag{13}$$

Пусть x_j ($j = 1, 2, \ldots, n+1$) — нули полинома $p_{n+1}(x)$. Согласно (13) знак произведения $p'_{n+1}(x)\, p_n(x)$ в нулях x_j полинома $p_{n+1}(x)$ не зависит от j. Однако при переходе от x_j к x_{j+1} первый сомножитель $p'_{n+1}(x)$ меняет знак. Значит, должен менять знак и второй сомножитель $p_n(x)$. Следовательно, $p_n(x)$ обращается в нуль по крайней мере один раз в некоторой точке интервала (x_j, x_{j+1}). Так как мы имеем n интервалов (x_j, x_{j+1}) и каждый из них содержит хотя бы один из n нулей полинома $p_n(x)$, то очевидно, что между любыми двумя последовательными нулями полинома $p_{n+1}(x)$ содержится в точности один нуль полинома $p_n(x)$.

6. Свойства четности полиномов, вытекающие из четности весовой функции. Пусть $p_n(x)$ — полиномы, ортогональные на интервале $(-a, a)$ с весом $\rho(x)$, являющимся четной функцией. Тогда, заменяя в (3) x на $-x$, получим

$$\int_{-a}^{a} p_n(-x)\, p_m(-x)\, \rho(x)\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Так как вес $\rho(x)$ определяет ортогональные полиномы однозначно с точностью до нормировочного множителя, то $p_n(-x) = C_n p_n(x)$. Из сравнения коэффициентов при старших степенях находим $C_n = (-1)^n$. Отсюда, в частности, вытекают следующие свойства четности полиномов Эрмита и Лежандра:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Последнее равенство является частным случаем равенства

$$P_n^{(\alpha\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

вытекающего из формулы Родрига для полиномов Якоби.

Мы показали, что полиномы $p_n(x)$, ортогональные на интервале $(-a, a)$ с весом $\rho(x)$, являющимся четной функцией, удовлетворяют соотношению

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x).$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях x в этом равенстве, нетрудно убедиться в том, что при нечетном n полиномы $p_n(x)$ содержат только нечетные степени x, а при n четном — только четные, т. е.

$$p_{2n}(x) = s_n(x^2), \quad p_{2n+1}(x) = xt_n(x^2).$$

Здесь $s_n(x)$, $t_n(x)$ — некоторые полиномы от x степени n. Отсюда

$$\int_{-a}^{a} p_{2n}(x)\, p_{2m}(x)\, \rho(x)\, dx = \int_{-a}^{a} s_n(x^2)\, s_m(x^2)\, \rho(x)\, dx =$$

$$= 2\int_{0}^{a} s_n(x^2)\, s_m(x^2)\, \rho(x)\, dx = \int_{0}^{a^2} s_n(\xi)\, s_m(\xi)\, \frac{\rho(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}\, d\xi.$$

Поэтому *полиномы* $s_n(x) = p_{2n}(\sqrt{x})$ *ортогональны на интервале* $(0,\ a^2)$ *с весом* $\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\rho(\sqrt{x})$. Совершенно аналогично,

$$\int_{-a}^{a} p_{2n+1}(x)\, p_{2m+1}(x)\, \rho(x)\, dx = \int_{-a}^{a} x^2 t_n(x^2)\, t_m(x^2)\, \rho(x)\, dx =$$

$$= \int_{0}^{a^2} t_n(\xi)\, t_m(\xi) \sqrt{\xi}\, \rho(\sqrt{\xi})\, d\xi.$$

Поэтому *полиномы* $t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} p_{2n+1}(\sqrt{x})$ *ортогональны на интервале* $(0,\ a^2)$ *с весом* $\rho_2(x) = \sqrt{x}\rho(\sqrt{x})$. В частности,

$$H_{2n}(x) = C_n L_n^{-1/2}(x^2), \quad H_{2n+1}(x) = A_n x L_n^{1/2}(x^2).$$

Постоянные C_n, A_n можно найти, сравнивая в полученных соотношениях коэффициенты при старших степенях (см. табл. 1), откуда

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-1\ 2}(x^2), \tag{14}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{1/2}(x^2). \tag{15}$$

Формулы (14), (15) позволяют найти значения полиномов Эрмита при $x = 0$:

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0.$$

7. Связь двух систем ортогональных полиномов, для которых отношение весов является рациональной функцией. Вычисление ортогональных полиномов $p_n(x)$ с помощью моментов C_k по формуле (6) является довольно громоздким при больших значениях n. Удобнее вычислять полиномы $p_n(x)$ с помощью рекуррентного соотношения (7), если коэффициенты рекуррентного соотношения заданы. Эти коэффициенты легко вычисляются лишь для узкого класса ортогональных полиномов. Поэтому большое практическое значение могут иметь простые формулы, связывающие две системы полиномов, ортогональных относительно различных весов. Такие формулы можно получить, например, для случая, когда отношение весов является рациональной функцией *).

Пусть $\{p_n(x)\}$ и $\{\bar{p}_n(x)\}$ — системы полиномов, ортогональных на интервале (a, b) соответственно с весами $\rho(x)$ и $\bar{\rho}(x)$, причем $\bar{\rho}(x) = R(x)\rho(x)$, где $R(x)$ — рациональная функция:

$$R(x) = \prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)\Big/\prod_{j=1}^{l}(x-\beta_j).$$

Найдем связь полиномов $\bar{p}_n(x)$ и $p_n(x)$ сначала для случая $k=1$, $l=0$, т. е. $\bar{\rho}(x) = (x-\alpha_1)\rho(x)$. Разложим полином $\bar{p}_n(x)$ по полиномам $p_m(x)$:

$$\bar{p}_n(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m p_m(x).$$

Здесь

$$c_m = \frac{1}{d_m^2}\int_a^b \bar{p}_n(x)\, p_m(x)\, \rho(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{d_m^2}\left[\int_a^b \bar{p}_n(x)\frac{p_m(x)-p_m(\alpha_1)}{x-\alpha_1}\bar{\rho}(x)\, dx + p_m(\alpha_1)\int_a^b \bar{p}_n(x)\rho(x)\, dx\right].$$

Так как функция $(p_m(x)-p_m(\alpha_1))/(x-\alpha_1)$ — полином степени $m-1<n$, то в силу свойств ортогональности полиномов $\bar{p}_n(x)$ первый интеграл равен нулю. Отсюда

$$c_m = A_n\frac{p_m(\alpha_1)}{d_m^2},$$

где A_n — постоянная.

Следовательно,

$$\bar{p}_n(x) = A_n\sum_{m=0}^{n}\frac{p_m(\alpha_1)\,p_m(x)}{d_m^2}.$$

Если воспользоваться формулой Дарбу — Кристоффеля, то придем к следующему выражению:

$$\bar{p}_n(x) = D_n\frac{p_{n+1}(x)\,p_n(\alpha_1) - p_{n+1}(\alpha_1)\,p_n(x)}{x-\alpha_1}, \tag{16}$$

где D_n — постоянная.

---

*) См. Уваров В. Б. О связи системы полиномов, ортогональных относительно различных функций распределения.— ЖВМ и МФ, 1969, 9, № 6.

Рассмотрим теперь случай $k=0$, $l=1$, т. е. $\bar{\rho}(x) = \rho(x)/(x-\beta_1)$. Снова воспользуемся разложением полинома $\bar{p}_n(x)$ по полиномам $p_m(x)$:

$$\bar{p}_n(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m p_m(x),$$

где

$$c_m = \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \bar{p}_n(x)\, p_m(x)\, \rho(x)\, dx = \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \bar{p}_n(x)(x-\beta_1)\, p_m(x)\, \bar{\rho}(x)\, dx.$$

Так как функция $(x-\beta_1)p_m(x)$ — полином степени $m+1$, то в силу свойств ортогональности полиномов $\bar{p}_n(x)$ коэффициенты c_m равны нулю при $m < n-1$, т. е.

$$\bar{p}_n(x) = c_{n-1}p_{n-1}(x) + c_n p_n(x).$$

Для определения коэффициентов c_{n-1} и c_n проинтегрируем это соотношение на интервале (a, b) с весом $\bar{\rho}(x) = \rho(x)/(x-\beta_1)$. При $n \geqslant 1$ интеграл от левой части соотношения равен нулю, т. е.

$$c_{n-1}q_{n-1}(\beta_1) + c_n q_n(\beta_1) = 0,$$

где

$$q_m(z) = \int_a^b \frac{p_m(x)\,\rho(x)}{x-z}\, dx.$$

Отсюда

$$c_n = D_n q_{n-1}(\beta_1), \quad c_{n-1} = -D_n q_n(\beta_1),$$

где D_n — постоянная.

Таким образом, при $\bar{\rho}(x) = \rho(x)/(x-\beta_1)$ имеем

$$\bar{p}_n(x) = D_n[p_n(x)q_{n-1}(\beta_1) - p_{n-1}(x)q_n(\beta_1)]. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда

$$\bar{\rho}(x) = \frac{\prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)}{\prod_{j=1}^{l}(x-\beta_j)}\rho(x).$$

Если использовать формулы вида (16), (17), то по индукции, увеличивая k или l на единицу, можно получить, что

$$\bar{p}_n(x) = \frac{D_n}{\prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)} \begin{vmatrix} q_{n-l}(\beta_1) & \cdots & q_{n+k}(\beta_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n-l}(\beta_l) & \cdots & q_{n+k}(\beta_l) \\ p_{n-l}(\alpha_1) & \cdots & p_{n+k}(\alpha_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-l}(\alpha_k) & \cdots & p_{n+k}(\alpha_k) \\ p_{n-l}(x) & \cdots & p_{n+k}(x) \end{vmatrix},$$

где D_n — нормировочная постоянная. Напомним, что функции $q_m(z)$ и полиномы $p_m(z)$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению (см. п. 3).

§ 7. Качественное поведение и асимптотические свойства полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита

1. Качественное поведение. Для исследования качественного поведения решений дифференциального уравнения вида

$$[k(x)y']' + r(x)y = 0$$

на интервале, где $k(x) > 0$, $r(x) > 0$, удобно ввести вместо осциллирующей функции $y(x)$ функцию

$$v(x) = y^2(x) + a(x)[k(x)y'(x)]^2,$$

для которой множитель $a(x)$ подбирается таким образом, чтобы области монотонного поведения функции $v(x)$ были известны. Для этого вычислим производную $v'(x)$, используя дифференциальное уравнение для функции $y(x)$:

$$v'(x) = 2yy' + a'(x)[k(x)y']^2 + 2a(x)k(x)y'[k(x)y']' =$$
$$= a'(x)[k(x)y']^2 + 2yy'[1 - a(x)k(x)r(x)].$$

Если выбрать функцию $a(x)$ из условия $1 - a(x)k(x)r(x) = 0$, то

$$v'(x) = \left[\frac{1}{k(x)\,r(x)}\right]'[k(x)\,y']^2.$$

Так как $[k(x)y']^2 \geqslant 0$, то при таком выборе функции $a(x)$ области монотонного возрастания и убывания функции $v(x)$ будут совпадать с аналогичными областями для функции $1/(k(x)r(x))$. Отметим, что значения функций $v(x)$ и $y^2(x)$ равны друг другу в точках максимума функции $y^2(x)$. Это позволяет найти области, в которых последовательные максимумы функции $|y(x)|$ возрастают или убывают.

Применим приведенные выше соображения для выяснения качественного поведения классических ортогональных полиномов на интервале ортогональности (a, b), где $\sigma(x) \geqslant 0$. Полиномы $y = y_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$[k(x)y']' + r(x)y = 0$$

при $k(x) = \sigma(x)\rho(x)$, $r(x) = \lambda\rho(x)$, $\lambda = \lambda_n$ $(n \neq 0)$. Поэтому положим

$$v(x) = y^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda}[y'(x)]^2. \qquad (1)$$

С помощью дифференциального уравнения для полинома $y(x)$ находим

$$v'(x) = \frac{\sigma'(x) - 2\tau(x)}{\lambda}[y'(x)]^2. \qquad (2)$$