где D_n — нормировочная постоянная. Напомним, что функции $q_m(z)$ и полиномы $p_m(z)$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению (см. п. 3).

§ 7. Качественное поведение и асимптотические свойства полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита

1. Качественное поведение. Для исследования качественного поведения решений дифференциального уравнения вида

$$[k(x)y']' + r(x)y = 0$$

на интервале, где $k(x) > 0$, $r(x) > 0$, удобно ввести вместо осциллирующей функции $y(x)$ функцию

$$v(x) = y^2(x) + a(x)[k(x)y'(x)]^2,$$

для которой множитель $a(x)$ подбирается таким образом, чтобы области монотонного поведения функции $v(x)$ были известны. Для этого вычислим производную $v'(x)$, используя дифференциальное уравнение для функции $y(x)$:

$$v'(x) = 2yy' + a'(x)[k(x)y']^2 + 2a(x)k(x)y'[k(x)y']' =$$
$$= a'(x)[k(x)y']^2 + 2yy'[1 - a(x)k(x)r(x)].$$

Если выбрать функцию $a(x)$ из условия $1 - a(x)k(x)r(x) = 0$, то

$$v'(x) = \left[\frac{1}{k(x)\,r(x)}\right]'[k(x)\,y']^2.$$

Так как $[k(x)y']^2 \geqslant 0$, то при таком выборе функции $a(x)$ области монотонного возрастания и убывания функции $v(x)$ будут совпадать с аналогичными областями для функции $1/(k(x)r(x))$. Отметим, что значения функций $v(x)$ и $y^2(x)$ равны друг другу в точках максимума функции $y^2(x)$. Это позволяет найти области, в которых последовательные максимумы функции $|y(x)|$ возрастают или убывают.

Применим приведенные выше соображения для выяснения качественного поведения классических ортогональных полиномов на интервале ортогональности (a, b), где $\sigma(x) \geqslant 0$. Полиномы $y = y_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$[k(x)y']' + r(x)y = 0$$

при $k(x) = \sigma(x)\rho(x)$, $r(x) = \lambda\rho(x)$, $\lambda = \lambda_n$ $(n \neq 0)$. Поэтому положим

$$v(x) = y^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda}[y'(x)]^2. \quad (1)$$

С помощью дифференциального уравнения для полинома $y(x)$ находим

$$v'(x) = \frac{\sigma'(x) - 2\tau(x)}{\lambda}[y'(x)]^2. \quad (2)$$

Из полученного выражения видно, что знак функции $v'(x)$ совпадает со знаком полинома первой степени $[\sigma'(x)-2\tau(x)]/\lambda$. Значения функций $v(x)$ и $y^2(x)$ равны друг другу в точках, где $\sigma(x)=0$, а также в точках максимума функции $y^2(x)$, в которых $y'(x)=0$. Поэтому в области, где $v'(x)<0$, последовательные

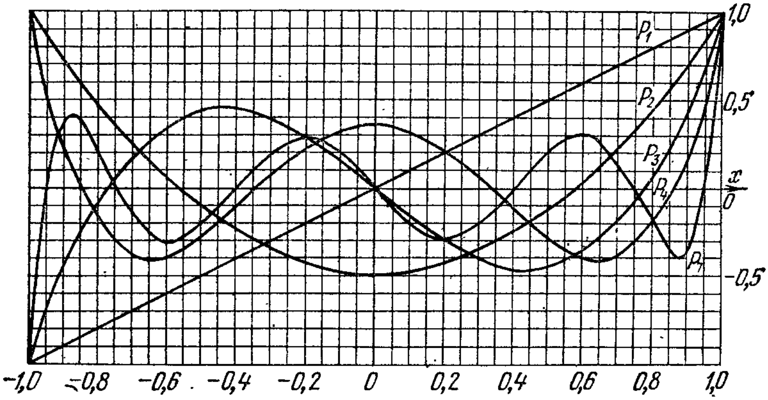

Рис. 1.

значения функции $|y(x)|$ в таких точках будут убывать, а в области, где $v'(x)>0$,— возрастать.

Примеры. 1. Для *полиномов Якоби* $\sigma(x)=0$ при $x=\pm1$, $\sigma'(x)-2\tau(x)=2(\alpha-\beta+(\alpha+\beta+1)x)$. Пусть $\alpha+1/2>0$, $\beta+1/2>0$; тогда $\lambda_n\geqslant1$. При $-1<x<\tilde{x}=\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}$ имеем

$$\sigma'(x)-2\tau(x)<0, \qquad \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|<\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)\right|,$$

причем величины максимумов функции $\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|$ убывают с ростом x. Аналогично, при $\tilde{x}<x<1$ величины последовательных максимумов функции $\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|$ будут возрастать.

Таким образом, при $\alpha+1/2>0$, $\beta+1/2>0$, $-1<x<1$ имеем

$$\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right|<\max\left[\left|P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)\right|, \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(1)\right|\right].$$

В частности, для полиномов Лежандра $|P_n(x)|<1$ при $-1<x<1$ (рис. 1).

2. Для *полиномов Лагерра* при $\alpha+1/2>0$, $0<x<\tilde{x}=\alpha+1/2$ имеем $\left|L_n^\alpha(x)\right|<\left|L_n^\alpha(0)\right|$, причем величины последовательных максимумов $\left|L_n^\alpha(x)\right|$ убывают. Если же $x>\tilde{x}$, то величины последовательных максимумов функции $\left|L_n^\alpha(x)\right|$ возрастают (рис. 2 для $L_n^\alpha(x)$ при $\alpha=0$).

3. Для *полиномов Эрмита* $\sigma'(x)-2\tau(x)=4x$. Поэтому величины последовательных максимумов $|H_n(x)|$ возрастают с ростом $|x|$.

2. Асимптотические свойства и некоторые оценки. Рассмотренные оценки передают качественное поведение полиномов $y = y_n(x)$ на интервале ортогональности. Получим теперь простые количественные оценки для полиномов Якоби и Лагерра, передающие более точно зависимость значений этих полиномов от n во внутренних точках интервала (a, b) при рассмотренных в п. 1 ограничениях на параметры. Соответствующие оценки для полиномов Эрмита можно получить, используя связь полиномов Эрмита с полиномами Лагерра (6.14) и (6.15)*).

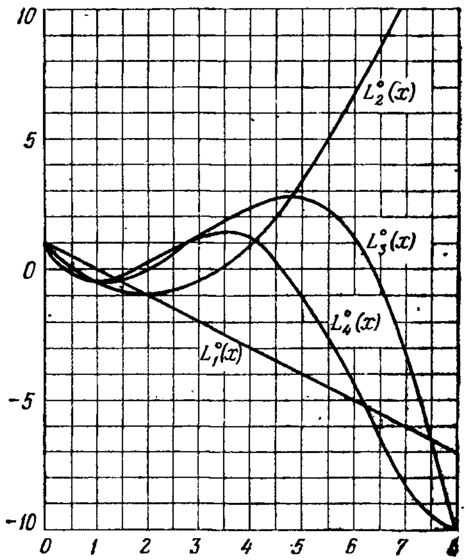

Рис. 2.

Будем исходить из обобщенного уравнения гипергеометрического типа

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)}u = 0, \tag{3}$$

которое с помощью преобразования $u = \varphi(x)y$ (см. § 1) переводится в уравнение для классических ортогональных полиномов

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0. \tag{4}$$

Напомним связь коэффициентов уравнений (3) и (4):

$$\tilde{\tau}(x) = \tau(x) - 2\pi(x), \quad \tilde{\sigma}(x) = \lambda\sigma(x) - q(x),$$

$$q(x) = \pi^2(x) + \pi(x)[\tilde{\tau}(x) - \sigma'(x)] + \pi'(x)\sigma(x).$$

Здесь $\pi(x)$ — полином не выше первой степени, входящий в дифференциальное уравнение $\varphi'(x)/\varphi(x) = \pi(x)/\sigma(x)$, которое определяет функцию $\varphi(x)$. Уравнение (3) удобно переписать в виде

$$\sigma(x)u'' + \tilde{\tau}(x)u' + \left[\lambda - \frac{q(x)}{\sigma(x)}\right]u = 0. \tag{5}$$

Для оценки $u(x)$ рассмотрим функцию

$$w(x) = u^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda}[u'(x)]^2,$$

*) Оценки, которые будут получены в п. 2, легко, но менее строго, можно вывести с помощью квазиклассического приближения (см. § 19, п. 2).

аналогичную функции $v(x)$ (см. п. 1). Очевидно, что на интервале (a, b) для полиномов Якоби и Лагерра имеем

$$|u(x)| \leqslant \sqrt{w(x)}. \tag{6}$$

С помощью дифференциального уравнения (5) находим

$$w'(x) = \frac{\sigma'(x) - 2\tilde{\tau}(x)}{\lambda}[u'(x)]^2 + \frac{2q(x)}{\lambda\sigma(x)} u(x) u'(x).$$

Выражение для $w'(x)$ принимает простой вид, если полином $\pi(x)$ выбрать из условия $\sigma'(x) - 2\tilde{\tau}(x) = 0$, т. е. положить

$$\pi(x) = \frac{1}{4}[2\tau(x) - \sigma'(x)].$$

В этом случае

$$w'(x) = \frac{2q(x)}{\lambda\sigma(x)} u(x) u'(x). \tag{7}$$

Из очевидного неравенства $2ab \leqslant a^2 + b^2$ (a, b — произвольные числа) вытекает, что

$$2\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}}\, uu' \leqslant u^2 + \frac{\sigma(x)}{\lambda}[u'(x)]^2 = w(x).$$

Поэтому, согласно (7),

$$w'(x) \leqslant \frac{|q(x)|}{\sqrt{\lambda}\sigma^{3/2}(x)} w(x).$$

Отсюда при $x \geqslant x_0$ имеем

$$w(x) = w(x_0) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{w'(s)}{w(s)} ds\right\} \leqslant w(x_0) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{|q(s)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(s)} ds\right\} \tag{8}$$

и, следовательно, в силу (6)

$$|u(x)| \leqslant \sqrt{w(x_0)} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \frac{|q(s)|}{2\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(s)} ds\right\}. \tag{9}$$

Воспользуемся оценкой (9) для полиномов Якоби. В силу соотношения симметрии

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

достаточно получить оценку для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ при $-1 < x \leqslant 0$. Для таких значений x имеем

$$\sigma(x) = 1 - x^2 \geqslant 1 + x,$$

откуда

$$\frac{|q(x)|}{2\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(x)} \leqslant \frac{A_1}{2\sqrt{\lambda}(1+x)^{3/2}},$$

где $A_1 = \max\limits_{-1<x<0} |q(x)|$. Поэтому в силу (9) при $-1 < x_0 \leqslant x \leqslant 0$ получим

$$|u(x)| \leqslant \sqrt{w(x_0)} \exp\left\{\frac{A_1}{\sqrt{\lambda(1+x_0)}}\right\}.$$

Как видно из полученной оценки, мы не можем положить $x_0 = -1$. Выберем значение x_0 из условия $\sqrt{\lambda(1+x_0)} = c$, где c — постоянная, не зависящая от n (так как $\lambda = \lambda_n$ зависит от n, то и величина x_0 также зависит от n). В этом случае

$$|u(x)| \leqslant A_2 \sqrt{w(x_0)}, \tag{10}$$

где A_2 — постоянная, не зависящая от n.

Для оценки величины $w(x_0)$ найдем связь функции $w(x)$ с полиномом Якоби $y(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Имеем $u(x) = \varphi(x)y(x)$, где $\varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\pi(x)}{\sigma(x)}, \quad \pi(x) = \frac{1}{4}[2\tau(x) - \sigma'(x)].$$

Так как

$$\frac{\pi(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2}\frac{\tau(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{4}\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma\rho)'}{\sigma\rho} - \frac{1}{4}\frac{\sigma'}{\sigma},$$

то

$$\varphi(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}, \quad u(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4} y(x).$$

Отсюда

$$w(x) = u^2(x) + \frac{\sigma(x)}{\lambda}[u'(x)]^2 =$$
$$= \sqrt{\sigma(x)\rho^2(x)}\left[y^2(x) + \left(\frac{2\tau(x) - \sigma'(x)}{4\sqrt{\lambda\sigma(x)}}\, y + \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}}\, y'\right)^2\right]. \tag{11}$$

При оценке $w(x)$ мы будем опираться на очевидную оценку (см. (1))

$$\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}}\,|y'(x)| \leqslant \sqrt{v(x)}$$

и на доказанные в п. 1 при $-1 < x < \tilde{x} = (\beta - \alpha)/(\alpha + \beta + 1)$ неравенства

$$|y(x)| \leqslant |y(-1)|, \quad v(x) \leqslant v(-1) = y^2(-1),$$
$$0 \leqslant 2\tau(x) - \sigma'(x) < 2\tau(-1) - \sigma'(-1).$$

Так как $\sqrt{\lambda\sigma(x_0)} \geqslant \sqrt{\lambda(1+x_0)} = c$, то в силу этих оценок из формулы (11) при $x_0 < \tilde{x}$ имеем

$$w(x_0) \leqslant A_3 \sqrt{\sigma(x_0)\rho^2(x_0)}\, y^2(-1),$$

где

$$A_3 = 1 + \left(\frac{2\tau(-1) - \sigma'(-1)}{4c} + 1\right)^2.$$

Условие $x_0 < x$ будет автоматически выполняться при $n \geqslant 1$, если положим $c < \sqrt{1+\tilde{x}}$, так как $\lambda = \lambda_n \geqslant 1$ при $n \geqslant 1$. С помощью соотношения

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta$$

(см. Дополнение А, (26)), формулы (5.11) и равенства $\sqrt{\lambda(1+x_0)} = C$, определяющего величину x_0, нетрудно убедиться в том, что величина $\sqrt{n}[\sigma(x_0)\rho^2(x_0)]^{1/4}|y(-1)|$ равномерно ограничена относительно n. Поэтому из оценки для $w(x_0)$ и формулы (10) вытекает при $\alpha + 1/2 > 0$, $\beta + 1/2 > 0$ следующая оценка для полиномов Якоби:

$$|u(x)| = (1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqslant A/\sqrt{n}, \quad (12)$$

где A — постоянная, не зависящая от n.

Неравенство (12) было выведено при $x \geqslant x_0$. Покажем, что оно останется справедливым и при $-1 \leqslant x < x_0$. Действительно, функция $\varphi(x) = [\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}$ при $-1 \leqslant x < \tilde{x}$ монотонно возрастает в силу того, что

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\pi(x)}{\sigma(x)}, \quad \text{где} \quad \pi(x) = 2\tau(x) - \sigma'(x) > 0, \qquad \sigma(x) > 0.$$

Поэтому при $-1 \leqslant x < x_0$ имеем

$$[\sigma(x)\rho^2(x)]^{1/4}|y(x)| \leqslant [\sigma(x_0)\rho^2(x_0)]^{1/4}|y(-1)|.$$

Величина $\sqrt{n}[\sigma(x_0)\rho^2(x_0)]^{1/4}|y(-1)|$, как указывалось ранее, равномерно ограничена по n. Поэтому неравенство (12) справедливо при $-1 \leqslant x \leqslant 0$. С помощью соотношения

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

легко убедиться, что неравенство (12) останется справедливым и при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Так как для полиномов Якоби

$$d_n^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

то с помощью соотношения

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta$$

можно получить, что величина nd_n^2 ограничена. Поэтому оценку (12) для полиномов Якоби можно переписать в виде

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}\frac{|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|}{d_n} \leqslant c_1, \quad (13)$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от n.

Тем же методом, что и для полиномов Якоби, с помощью неравенства (8), полагая $\sqrt{\lambda x_0} = c$, можно прийти к следующей оценке для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha + 1/2 > 0$:

$$\sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leqslant \frac{c_2}{n^{1/4}}, \tag{14}$$

$$x^{\alpha/2+1/4} e^{-x/2} \frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n} \leqslant \sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leqslant \frac{c_2}{n^{1/4}}, \tag{15}$$

где c_2 — постоянная, не зависящая от n.

Оценка (9) для полиномов Лагерра груба при $x \to \infty$, так как правая часть в равенстве (8) экспоненциально растет при $x \to +\infty$, в то время как левая часть экспоненциально убывает. Улучшить оценку можно с помощью равенства (7) следующим образом. Так как

$$\sqrt{\frac{\sigma(x)}{\lambda}} |u'(x)| \leqslant \sqrt{w(x)},$$

то

$$w'(x) \leqslant \frac{2|q(x)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(x)} |u(x)| \sqrt{w(x)},$$

т. е.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{w(x)} \leqslant \frac{|q(x)\, u(x)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{3/2}(x)} = \frac{|q(x)| \sqrt{\rho(x)}\, |y(x)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{5/4}(x)}. \tag{16}$$

Отсюда при $x > 1$ имеем

$$\sqrt{w(x)} \leqslant \sqrt{w(1)} + \int_1^x \frac{|q(s)| \sqrt{\rho(s)}\, |y(s)|}{\sqrt{\lambda}\,\sigma^{5/4}(s)} ds.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\sqrt{w(x)} \leqslant \sqrt{w(1)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s)\, ds}{\sigma^{5/2}(s)} \int_0^\infty y^2(s)\, \rho(s)\, ds},$$

откуда

$$[\sigma(x)\, \rho^2(x)]^{1/4} \frac{|y(x)|}{d_n} = \frac{|u(x)|}{d_n} \leqslant \sqrt{\frac{w(x)}{d_n^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{w(1)}{d_n^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s)\, ds}{\sigma^{5/2}(s)}}. \tag{17}$$

В силу неравенства (14) имеем

$$\sqrt{\frac{w(1)}{d_n^2}} \leqslant \frac{c_2}{n^{1/4}}. \tag{18}$$

Так как $q(x)$ — полином второй степени, $\sigma(x)=x$, то найдется такая постоянная c_3, не зависящая от n, что

$$\sqrt{\int_1^x \frac{q^2(s)\,ds}{\sigma^{5/2}(s)}} \leqslant c_3 x^{5/4}. \tag{19}$$

Подставляя в (17) оценки (18) и (19), при $x>1$, $\alpha+1/2>0$ получим

$$x^{\alpha/2+1/4}e^{-x/2}\frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n} \leqslant \frac{c_2}{n^{1/4}}+\frac{c_3x^{5/4}}{n^{1/2}}. \tag{20}$$

Нетрудно проверить, что эта оценка справедлива при всех значениях $x \geqslant 0$ (см. (15)).

Интересно отметить, что неравенство (20) справедливо и при $\alpha+1/2=0$, так как для полиномов Лагерра в этом случае

$$q(x)=\frac{x^2}{4}-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{4}\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\Big|_{\alpha=-1/2}=\frac{x^2}{4}.$$

Поэтому в (16) точка $x=0$ не является особой, и при интегрировании (16) в качестве нижнего предела можно взять $x=0$, что сразу приводит к оценке (20).

Оценку для полиномов Эрмита можно получить из (20) при $\alpha=\pm 1/2$, используя формулы (6.14), (6.15):

$$e^{-x^2/2}\frac{|H_n(x)|}{d_n} \leqslant \frac{c_2}{n^{1/4}}+\frac{c_3x^{5/2}}{n^{1/2}}. \tag{21}$$

Замечание. Если $x\in[x_1, x_2]$, где $a<x_1<x_2<b$, то из оценок (19)—(21) вытекают более простые оценки

$$\frac{|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|}{d_n} \leqslant c_1, \quad \alpha+\frac{1}{2}>0, \quad \beta+\frac{1}{2}>0, \tag{13a}$$

$$\frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n} \leqslant \frac{c_2}{n^{1/4}}, \quad \alpha+\frac{1}{2}>0, \tag{20a}$$

$$\frac{|H_n(x)|}{d_n} \leqslant \frac{c_3}{n^{1/4}}, \tag{21a}$$

где постоянные c_1, c_2, c_3, очевидно, могут зависеть от x_1, x_2 и параметров α, β.

Оценки (13а) и (20а) остаются справедливыми при любых вещественных значениях α, β. Докажем, например, справедливость неравенства (13а), или, что то же самое, неравенства

$$\sqrt{n}\,|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqslant c, \tag{12a}$$

где c — постоянная.

Доказательство проведем методом математической индукции, предполагая справедливость неравенства (12а) для полиномов

$P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ и $P_n^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)$. Из дифференциального уравнения для полиномов Якоби и формулы дифференцирования (5.6) имеем

$$\sqrt{n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\sqrt{n}}{\lambda_n}\left[\tau(x)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] =$$
$$= -\frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x}{2\sqrt{n}}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) -$$
$$-\frac{1-x^2}{4}\left(1+\frac{\alpha+\beta+2}{n}\right)\sqrt{n}P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x).$$

В силу справедливости (12а) для полиномов $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ и $P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)$ приходим к неравенству вида (12а) для полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Аналогично доказывается справедливость неравенства (20а) при любых вещественных значениях параметра α.

§ 8. Разложение функций в ряды по классическим ортогональным полиномам

1. Общие соображения. Для приложений имеет большое значение вопрос о нахождении для функции $f(x)$ таких постоянных a_n, которые обеспечивают минимум *среднего квадратичного отклонения*

$$m_N = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n y_n(x)\right]^2 \rho(x)\,dx,$$

где $y_n(x)$ — функции, ортогональные с весом $\rho(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b), а функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx < \infty.$$

В силу ортогональности функций $y_n(x)$ имеем

$$m_N = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx - 2\sum_{n=0}^{N} a_n \int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\,dx +$$
$$+\sum_{n=0}^{N} a_n^2 \int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\,dx.$$

Полагая

$$d_n^2 = \int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\,dx, \quad c_n = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\,dx,$$

получим

$$m_N = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx + \sum_{n=0}^{N}(a_n - c_n)^2 d_n^2 - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 d_n^2.$$