$P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ и $P_n^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)$. Из дифференциального уравнения для полиномов Якоби и формулы дифференцирования (5.6) имеем

$$\sqrt{n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\sqrt{n}}{\lambda_n}\left[\tau(x)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] =$$

$$= -\frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x}{2\sqrt{n}}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) -$$

$$-\frac{1-x^2}{4}\left(1+\frac{\alpha+\beta+2}{n}\right)\sqrt{n}P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x).$$

В силу справедливости (12а) для полиномов $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ и $P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)$ приходим к неравенству вида (12а) для полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Аналогично доказывается справедливость неравенства (20а) при любых вещественных значениях параметра α.

§ 8. Разложение функций в ряды по классическим ортогональным полиномам

1. Общие соображения. Для приложений имеет большое значение вопрос о нахождении для функции $f(x)$ таких постоянных a_n, которые обеспечивают минимум *среднего квадратичного отклонения*

$$m_N = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n y_n(x)\right]^2 \rho(x)\,dx,$$

где $y_n(x)$ — функции, ортогональные с весом $\rho(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b), а функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx < \infty.$$

В силу ортогональности функций $y_n(x)$ имеем

$$m_N = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx - 2\sum_{n=0}^{N} a_n \int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\,dx +$$

$$+\sum_{n=0}^{N} a_n^2 \int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\,dx.$$

Полагая

$$d_n^2 = \int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\,dx, \quad c_n = \frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\,dx,$$

получим

$$m_N = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx + \sum_{n=0}^{N}(a_n - c_n)^2 d_n^2 - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 d_n^2.$$

Отсюда видно, что минимум величины m_N достигается при $a_n = c_n$, т. е.

$$\Delta_N = \min m_N = \int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 d_n^2.$$

Так как постоянные c_n не зависят от N, то последовательность $\{\Delta_N\}$ является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу $(\Delta_N \geqslant 0)$. Поэтому существует неотрицательный предел $\lim\limits_{N\to\infty} \Delta_N$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2$ сходится, причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{1}$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*.

Если $\lim\limits_{N\to\infty} \Delta_N = 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x), \tag{2}$$

где

$$c_n = \frac{1}{d_n^2} \int_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx, \tag{3}$$

а ряд в правой части (2) сходится в среднем на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n y_n(x) \right]^2 \rho(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

В этом случае соотношение (1) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx.$$

Это равенство называется *равенством Парсеваля*. Ряд в правой части (2) называется *рядом Фурье* разложения функции $f(x)$ по функциям $y_n(x)$, а величины c_n — *коэффициентами Фурье* этого разложения.

Если соотношение (4) имеет место для произвольной функции $f(x)$ из какого-либо класса функций, удовлетворяющих условию квадратичной интегрируемости

$$\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx < \infty, \tag{5}$$

то система функций $\{y_n(x)\}$ называется *полной* в этом классе функций. Необходимым признаком полноты системы функций $\{y_n(x)\}$ является, как нетрудно проверить, свойство *замкнутости* этой системы, заключающееся в том, что из равенств

$$\int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

вытекает равенство $f(x) \equiv 0$ при $x \in (a, b)$ для любых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (5). Таким образом, основой для рассмотрения вопроса о возможности разложения (2) функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\{y_n(x)\}$ является замкнутость этой системы.

2. Замкнутость системы ортогональных полиномов. Докажем, что *система полиномов $\{p_n(x)\}$ будет замкнутой для непрерывных функций $f(x)$, если функция $\rho(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и существует такая постоянная $c_0 > 0$, что*

$$\int_a^b e^{c_0|x|} \rho(x)\, dx < \infty. \tag{7}$$

Для доказательства рассмотрим непрерывную на интервале (a, b) функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям (5), (6). Рассмотрим также функцию комплексной переменной

$$F(z) = \int_a^b e^{ixz} f(x)\, \rho(x)\, dx \tag{8}$$

в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant c$ при $c < c_0/2$. Покажем, что в этой полосе функция $F(z)$ является аналитической. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость интеграла (8). Так как в рассматриваемой полосе

$$|e^{ixz} f(x)\, \rho(x)| \leqslant e^{|x \operatorname{Im} z|} |f(x)|\, \rho(x) \leqslant e^{c_0|x|/2} |f(x)|\, \rho(x),$$

то интеграл $F(z)$ будет сходиться равномерно в этой полосе, если мы покажем, что интеграл

$$\int_a^b e^{c_0|x|/2} |f(x)|\, \rho(x)\, dx$$

сходится. Сходимость последнего интеграла вытекает из неравенства Коши — Буняковского

$$\int_a^b e^{c_0|x|/2} |f(x)|\, \rho(x)\, dx \leqslant \sqrt{\int_a^b e^{c_0|x|} \rho(x)\, dx \int_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx} < \infty.$$

По теореме об аналитичности интеграла, зависящего от параметра, функция $F(z)$ будет аналитична в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant c$ и, в частности, аналитична в круге $|z| \leqslant c$. Поэтому ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(0)\frac{z^k}{k!}, \qquad |z|\leqslant c. \tag{9}$$

Пользуясь аналогичными оценками, нетрудно доказать равномерную сходимость в той же области интегралов, получающихся в результате дифференцирования подынтегрального выражения по z. Следовательно, при вычислении производных $F^{(k)}(0)$ можно производить дифференцирование под знаком интеграла, откуда

$$F^{(k)}(0)=\int_a^b (ix)^k f(x)\rho(x)\,dx, \qquad k=0, 1, \ldots$$

Раскладывая $(ix)^k$ по полиномам $p_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots, k)$ и используя (6), получим

$$F^{(k)}(0)=\int_a^b (ix)^k f(x)\rho(x)\,dx=\int_a^b\left[\sum_{n=0}^{k} c_{kn}p_n(x)\right]f(x)\rho(x)\,dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{k} c_{kn}\int_a^b f(x)p_n(x)\rho(x)\,dx=0.$$

Так как $F^{(k)}(0)=0$, то из разложения (9) вытекает, что в круге $|z|\leqslant c$ функция $F(z)$ равна нулю. По принципу аналитического продолжения $F(z)=0$ при любых z, принадлежащих области аналитичности функции $F(z)$. В частности, $F(z)=0$ при любых вещественных значениях z.

Очевидно, что формулу (8) для $F(z)$ можно записать также в виде

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz}f(x)\rho(x)\,dx, \tag{10}$$

если положить $f(x)\rho(x)=0$ при $x<a$ и $x>b$.

Выражение (10) для $F(z)$ при вещественных значениях z представляет собой коэффициент разложения функции $f(x)\rho(x)$ в интеграл Фурье. Согласно равенству Парсеваля для интеграла Фурье имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)\rho(x)]^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(z)|^2\,dz=0.$$

Отсюда в силу непрерывности функции $f(x)$ и положительности веса $\rho(x)$ при $x\in(a, b)$ получим $f(x)\equiv 0$ на интервале (a, b), т. е. система ортогональных полиномов $\{p_n(x)\}$ действительно является замкнутой на интервале (a, b).

Используя явный вид функции $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов, легко показать, что перечисленные выше условия, наложенные на функцию $\rho(x)$, для классических ортогональных полиномов выполняются. Для полиномов Лагерра достаточно выбрать $c_0 < 1$, а для полиномов Якоби и Эрмита условие (7) будет выполнено при любом $c_0 > 0$. Поэтому *система классических ортогональных полиномов является замкнутой* на интервале (a, b) для непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (5).

3. Теоремы разложения. Опираясь на замкнутость системы классических ортогональных полиномов и оценки из § 7, легко найти простейшие условия, обеспечивающие справедливость разложения (2) произвольной функции $f(x)$. Докажем, что имеет место следующая теорема разложения.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a < x < b$ и имеет кусочно непрерывную производную на этом интервале, а функция $\rho(x)$ является весом для классических ортогональных полиномов $y_n(x)$. Если интегралы*

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx, \qquad \int_a^b [f'(x)]^2\sigma(x)\rho(x)\,dx$$

сходятся, то на интервале (a, b) справедливо разложение (2) функции $f(x)$ по полиномам $y_n(x)$, причем ряд (2) сходится равномерно по x на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.

Доказательство. Оценим предварительно коэффициенты Фурье c_n. Производные классических ортогональных полиномов, как было показано в § 5, являются классическими полиномами, ортогональными на интервале (a, b) с весом $\sigma(x)\rho(x)$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя, для коэффициентов разложения $\tilde{c}_n$ функции $f'(x)$ по полиномам $y'_n(x)$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^2 \tilde{d}_n^2 \leqslant \int_a^b [f'(x)]^2\sigma(x)\rho(x)\,dx < \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{\tilde{d}_n^2}\int_a^b f'(x)\,y'_n(x)\,\sigma(x)\rho(x)\,dx, \\ \tilde{d}_n^2 &= \int_a^b [y'_n(x)]^2\sigma(x)\rho(x)\,dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Найдем связь коэффициентов $\tilde{c}_n$ и c_n. С помощью дифференциального уравнения

$$(\sigma\rho y'_n)' + \lambda_n\rho y_n = 0$$

и интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f'(x)\, y_n'(x)\, \sigma(x)\, \rho(x)\, dx =$$

$$= f(x)\, y_n'(x)\, \sigma(x)\, \rho(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x) \left[\sigma(x)\, \rho(x)\, y_n'(x)\right]' dx =$$

$$= f(x)\, y_n'(x)\, \sigma(x)\, \rho(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \lambda_n \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx,$$

$$a < x_1 < x_2 < b. \tag{12}$$

Интегралы в (12) имеют конечные пределы при $x_1 \to a$ или $x_2 \to b$ в силу условий теоремы и неравенства Коши — Буняковского. Поэтому существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} f(x)\, y_n'(x)\, \sigma(x)\, \rho(x) = A_n,$$

$$\lim_{x \to b} f(x)\, y_n'(x)\, \sigma(x)\, \rho(x) = B_n.$$

Докажем, что $B_n = 0$. Предположим, что $B_n \neq 0$ при некотором значении n. Тогда при $x \to b$

$$f(x) \approx \frac{B_n}{y_n'(x)\, \sigma(x)\, \rho(x)}. \tag{13}$$

Из явного вида функции $\rho(x)$ и соотношения (13) вытекает, что при $B_n \neq 0$ функция $f(x)$ не удовлетворяет условию сходимости интеграла

$$\int\limits_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx.$$

Действительно, если, например, b — конечное число, то при $x \to b$ (см. § 5, п. 1)

$$\sigma(x) \sim b - x, \quad \rho(x) \sim (b-x)^\alpha, \quad \alpha > -1,$$

откуда

$$f(x) \sim \frac{1}{(b-x)^{\alpha+1}}, \quad f^2(x)\, \rho(x) \sim \frac{1}{(b-x)^{\alpha+2}}.$$

Отсюда видно, что при $\alpha > -1$ интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx$ расходится.

Аналогично производится исследование поведения функции $f^2(x)\rho(x)$ при $x \to b$, когда $b = +\infty$. Тем самым мы доказали, что $B_n = 0$ при любых значениях n. Исследование поведения функции $f^2(x)\rho(x)$ при $x \to a$, подобное проведенному выше, приводит к равенству $A_n = 0$. Поэтому, переходя в (12) к пределу при $x_1 \to a$ и $x_2 \to b$, получим

$$\int_a^b f'(x)\, y_n'(x)\, \sigma(x)\, \rho(x)\, dx = \lambda_n \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx.$$

В частности, при $f(x) = y_n(x)$ имеем $\tilde{d}_n^2 = \lambda_n d_n^2$, откуда $\tilde{c}_n = c_n$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^2 \tilde{d}_n^2$ сходится, то должен сходиться также ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 \lambda_n$.

Докажем теперь, что интересующий нас ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)$ сходится равномерно при $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$ для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$. Используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\left| \sum_{n=N_1}^{N_2} c_n y_n(x) \right| \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} \left| c_n d_n \sqrt{\lambda_n} \right| \frac{|y_n(x)|}{\sqrt{\lambda_n}\, d_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} c_n^2 d_n^2 \lambda_n \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 d_n^2 \lambda_n} \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}}. \tag{14}$$

С помощью признака Коши равномерной сходимости рядов и оценки (14) легко убедиться в том, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)$ будет равномерно сходиться при $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$, если в рассматриваемой области изменения переменной x равномерно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$.

Для оценки величины $y_n^2(x)/(\lambda_n d_n^2)$ удобно воспользоваться линейной заменой независимой переменной, с помощью которой вес $\rho(x)$ и сами полиномы $y_n(x)$ приводятся к каноническому виду (см. § 5). При такой замене у величины $y_n^2(x)/(\lambda_n d_n^2)$ может появиться лишь постоянный множитель, не зависящий от n. Поэтому при исследовании сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ достаточно ограничиться случаями, когда $y_n(x)$ является полиномом Якоби, Лагерра или Эрмита. С помощью оценок, полученных в п. 2 § 7, докажем равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ при $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$.

Проведем соответствующие оценки на примере полиномов Лагерра $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$. В этом случае $a=0$, $b=\infty$, $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$. Согласно неравенству (7.20) при $x \in (0, \infty)$ имеем

$$\frac{1}{d_n} \left| L_n^\alpha(x) \right| \leqslant \frac{1}{n^{1/4}} \left(c_1 + c_2 x^{5/4}\right) x^{-\alpha/2-1/4} e^{x/2},$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные,

$$\frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}} (c_1 + c_2 x^{5/4})^2 x^{-\alpha-1/2} e^x. \tag{15}$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то из неравенства (15) непосредственно вытекает равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ для $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$ в области $0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \infty$. В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

Таким образом, мы видим, что в силу оценок (14) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)$ равномерно сходится при $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$ и является, следовательно, непрерывной функцией на интервале (a, b) в силу произвольности чисел x_1, x_2. Докажем теперь, что этот ряд сходится к $f(x)$.

Рассмотрим функцию

$$\bar{f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x).$$

Найдем коэффициенты Фурье ее разложения в ряд по полиномам $y_n(x)$. Имеем

$$\int_a^b \bar{f}(x)\, y_n(x) \rho(x) dx = \int_a^b y_n(x) \rho(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x) \right] dx =$$

$$= c_n d_n^2 - \sum_{k=0}^{N-1} c_k \int_a^b y_n(x) y_k(x) \rho(x)\, dx - I_N, \tag{16}$$

где

$$I_N = \int_a^b y_n(x) \rho(x) \left[\sum_{k=N}^{\infty} c_k y_k(x) \right] dx.$$

Так как

$$\int_a^b y_n(x) y_k(x) \rho(x)\, dx = 0, \qquad k \neq n,$$

то при $N > n$ получаем

$$\int_a^b \bar{f}(x) y_n(x) \rho(x)\, dx = -I_N. \tag{17}$$

Оценим величину I_N с помощью неравенства (14), полагая $N_1 = N$, $N_2 = \infty$:

$$|I_N| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 d_k^2 \lambda_k} \int_a^b |y_n(x)| \rho(x) \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} \frac{y_k^2(x)}{\lambda_k d_k^2}}\, dx.$$

Если воспользоваться оценками типа (15), то можно показать, что $I_N \to 0$ при $N \to \infty$. Переходя в (17) к пределу, получим

$$\int_a^b \bar{f}(x) y_n(x) \rho(x)\, dx = 0.$$

Так как это равенство справедливо при любом n и функция $\bar{f}(x)$ непрерывна при $a < x < b$, то в силу замкнутости системы классических ортогональных полиномов $\bar{f}(x) \equiv 0$ при $a < x < b$, что и доказывает справедливость разложения

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x).$$

З а м е ч а н и е 1. Мы доказали теорему разложения для функций $f(x)$, удовлетворяющих некоторым не слишком ограничительным требованиям. Если усложнить способ доказательства, то можно доказать более общую теорему разложения. Для этого дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов удобно предварительно привести к простейшему виду (см. § 19, п. 1):

$$u''(s) + [\lambda - q(s)] u(s) = 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant s_0. \tag{18}$$

При этом собственные функции исходного дифференциального уравнения перейдут в собственные функции $u = u_n(s)$ уравнения (18). В результате теорему разложения по классическим ортогональным полиномам можно заменить следующей теоремой о разложении по функциям $u_n(s)$ *).

Т е о р е м а 2 (теорема равносходимости). *Если для некоторой функции $f(s)$ интеграл $\int_0^{s_0} f^2(s)\, ds$ сходится, то разложение функции $f(s)$ по собственным функциям дифференциального уравнения* (18) *в интервале $0 < s < s_0$ сходится или расходится одновременно с разложением в тригонометрический ряд Фурье на этом интервале (если $s_0 = \infty$, то ряд Фурье следует заменить интегралом Фурье).*

*) Изложение этого вопроса можно найти в книге: Л е в и т а н Б. М., С а р г с я н И. С. Введение в спектральную теорию.— М.: Наука, 1970.

Замечание 2. Если при разложении функции $f(x)$ в ряд по классическим ортогональным полиномам $y_n(x)$ можно ограничиться сходимостью в среднем, то, как известно из курса математического анализа, такая сходимость для функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (5), будет вытекать непосредственно из свойства замкнутости системы $\{y_n(x)\}$ при условии, что всюду под определенными интегралами подразумеваются интегралы Лебега.

§ 9. Задачи на собственные значения, приводящие к классическим ортогональным полиномам

1. Постановка задачи. Рассмотрим решение уравнений гипергеометрического типа

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

при различных значениях λ для случая, когда функция $\rho(x)$, являющаяся решением уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, ограничена на некотором интервале (a, b) и удовлетворяет на этом интервале условиям, налагаемым на функцию $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов.

Как было показано ранее, простейшими решениями уравнения (1) являются классические ортогональные полиномы $y_n(x)$, которые соответствуют значениям

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad n = 0, 1, \ldots$$

Оказывается, что классические ортогональные полиномы выделяются среди всей совокупности решений уравнения (1), соответствующих различным значениям λ, не только своей простотой, но также и тем, что они являются единственно возможными нетривиальными решениями уравнения (1), удовлетворяющими требованиям ограниченности и квадратичной интегрируемости функции $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ на интервале (a, b).

Это свойство классических ортогональных полиномов широко используется при решении задач квантовой механики, связанных с нахождением уровней энергии и волновых функций частицы, движущейся в стационарном силовом поле. Если внешние силы удерживают частицу в ограниченной области пространства, так что она не может уйти на бесконечность, то говорят о связанных состояниях частицы. Чтобы найти волновые функции $\psi(\mathbf{r})$, описывающие эти состояния, и соответствующие им уровни энергии E, решают *стационарное уравнение Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi + U\psi = E\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, μ — масса частицы, $U = U(\mathbf{r})$ — потенциальная энергия, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.