З а м е ч а н и е 2. Если при разложении функции $f(x)$ в ряд по классическим ортогональным полиномам $y_n(x)$ можно ограничиться сходимостью в среднем, то, как известно из курса математического анализа, такая сходимость для функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (5), будет вытекать непосредственно из свойства замкнутости системы $\{y_n(x)\}$ при условии, что всюду под определенными интегралами подразумеваются интегралы Лебега.

§ 9. Задачи на собственные значения, приводящие к классическим ортогональным полиномам

1. Постановка задачи. Рассмотрим решение уравнений гипергеометрического типа

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \qquad (1)$$

при различных значениях λ для случая, когда функция $\rho(x)$, являющаяся решением уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, ограничена на некотором интервале (a, b) и удовлетворяет на этом интервале условиям, налагаемым на функцию $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов.

Как было показано ранее, простейшими решениями уравнения (1) являются классические ортогональные полиномы $y_n(x)$, которые соответствуют значениям

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Оказывается, что классические ортогональные полиномы выделяются среди всей совокупности решений уравнения (1), соответствующих различным значениям λ, не только своей простотой, но также и тем, что они являются единственно возможными нетривиальными решениями уравнения (1), удовлетворяющими требованиям ограниченности и квадратичной интегрируемости функции $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ на интервале (a, b).

Это свойство классических ортогональных полиномов широко используется при решении задач квантовой механики, связанных с нахождением уровней энергии и волновых функций частицы, движущейся в стационарном силовом поле. Если внешние силы удерживают частицу в ограниченной области пространства, так что она не может уйти на бесконечность, то говорят о связанных состояниях частицы. Чтобы найти волновые функции $\psi(\mathbf{r})$, описывающие эти состояния, и соответствующие им уровни энергии E, решают *стационарное уравнение Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi + U\psi = E\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, μ — масса частицы, $U = U(\mathbf{r})$ — потенциальная энергия, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

При этом волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ должна быть ограничена при любых конечных значениях $|\mathbf{r}|$ и должна удовлетворять условию нормировки

$$\int\limits_V |\psi(\mathbf{r})|^2 dV = 1. \tag{2}$$

Уравнение Шредингера для многих задач квантовой механики, которые можно решить аналитически с помощью метода разделения переменных, приводит к обобщенным уравнениям гипергеометрического типа (см. § 1)

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)}u = 0, \qquad a < x < b. \tag{3}$$

Энергия E входит в коэффициенты уравнения (3) как параметр. При этом предполагается, что $\sigma(x) > 0$ для $x \in (a, b)$, а на концах интервала (a, b), если они не находятся на бесконечности, полином $\sigma(x)$ равен нулю. Так как уравнение (3) не имеет особенностей при любом $x \in (a, b)$, то функция $u(x)$ будет непрерывной дифференцируемой функцией на интервале (a, b). Поэтому она может иметь особенности лишь при $x \to a$ и $x \to b$. Для формулировки дополнительных ограничений, налагаемых на функцию $u(x)$ на концах интервала (a, b), запишем уравнение (3) в самосопряженном виде:

$$(\sigma\tilde{\rho}u')' + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\tilde{\rho}u = 0. \tag{4}$$

Здесь функция $\tilde{\rho}(x) > 0$ является решением дифференциального уравнения

$$(\sigma\tilde{\rho})' = \tilde{\tau}\tilde{\rho}. \tag{5}$$

Требование ограниченности волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ и условие нормировки (2) выполняются, если для уравнения (4) задача будет поставлена следующим образом: *найти все значения энергии E, при которых на интервале (a, b) уравнение (4) имеет нетривиальные решения $u(x)$ такие, что функции $u(x)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ ограничены и квадратично интегрируемы на интервале (a, b), т. е. $|u(x)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}| < c$ (c — некоторая постоянная) и*

$$\int\limits_a^b |u(x)|^2 \tilde{\rho}(x)\,dx < \infty$$

(если a, b конечны, то последнее условие может быть опущено).

Как было показано в § 1, уравнение (3) с помощью замены $u = \varphi(x)y$ может быть приведено к уравнению гипергеометрического типа

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma\rho\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\rho y = 0, \tag{6}$$

где функция $\rho(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, а функция $\tau(x)$ связана с функциями $\tilde{\tau}(x)$ и $\varphi(x)$ соотношением

$$\tau = \tilde{\tau} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}\sigma.$$

Из этого соотношения и уравнения (5) следует, что $\rho(x) = \tilde{\rho}(x)\varphi^2(x)$. Поэтому требования к функции $u(x)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ переходят в перечисленные выше требования к функции $y(x)\sqrt{\rho(x)}$. Значения λ, при которых поставленная задача имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие функции $y(x, \lambda)$ *собственными функциями.*

Как было показано в § 1, уравнение (3) может быть приведено к (6) несколькими способами. Для большинства задач квантовой механики, допускающих аналитическое решение, среди возможных способов приведения уравнения (3) к (6) существует такой, при котором функция $\rho(x)$ является ограниченной на интервале (a, b) и удовлетворяет на этом интервале условиям, налагаемым на функцию $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов.

Замечание. Для выполнения условий, налагаемых на функцию $\rho(x)$ для классических ортогональных полиномов, необходимо, чтобы полином $\tau(x)$ обращался в нуль в некоторой точке интервала (a, b) и производная этого полинома при $\sigma(x) > 0$ была отрицательной, т. е. $\tau' < 0$.

Действительно, как видно из формулы Родрига, $y_1(x) = B_1\tau(x)$, и поэтому полином $\tau(x)$ имеет корень на интервале (a, b). Кроме того, по формуле (5.20)

$$d_{11}^2 = \lambda_1 d_1^2 = -\tau' d_1^2.$$

Так как $\rho(x) > 0$, $\sigma(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, то

$$d_1^2 = \int_a^b y_1^2(x)\rho(x)\,dx > 0, \quad d_{11}^2 = \int_a^b [y_1'(x)]^2\sigma(x)\rho(x)\,dx > 0.$$

Поэтому $\tau' < 0$.

Указанное замечание позволяет упростить выбор способа приведения уравнения (3) к (6), который сводится в результате к такому выбору постоянной k и знака перед корнем в (1.11) для $\pi(x)$, чтобы функция $\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$ удовлетворяла перечисленным требованиям.

2. Классические ортогональные полиномы как собственные функции некоторых задач на собственные значения. Рассмотрим задачу на собственные значения, сформулированную в п. 1.

Теорема. *Пусть функция* $y = y(x)$ — *решение уравнения* (1), *а функция* $\rho(x)$, *являющаяся решением уравнения* $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, *ограничена на некотором интервале* (a, b) *и удовлетворяет на этом интервале условиям, налагаемым на функцию* $\rho(x)$ *для* *классических ортогональных полиномов. Тогда нетривиальные решения уравнения гипергеометрического типа, удовлетворяющие требованиям ограниченности и квадратичной интегрируемости функции $y(x)\sqrt{\rho(x)}$ на интервале (a, b), существуют лишь при*

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

и имеют вид

$$y(x, \lambda_n) = y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)], \tag{8}$$

т. е. являются классическими полиномами, ортогональными с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) (если a, b конечны, то условие квадратичной интегрируемости может быть опущено).

Доказательство. Непосредственно проверяется, что классические ортогональные полиномы $y_n(x)$ при $\lambda = \lambda_n$ являются нетривиальными решениями поставленной задачи.

Покажем, что других решений задача не имеет. Предположим противное, т. е. что при некотором значении λ существует нетривиальное решение $y = y(x, \lambda)$, не являющееся классическим ортогональным полиномом. Имеем

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0, \quad (\sigma\rho y_n')' + \lambda_n\rho y_n = 0.$$

Умножим первое уравнение на $y_n(x)$, второе на $y(x, \lambda)$. После этого вычтем из первого равенства второе и проинтегрируем от x_1 до x_2 при $a < x_1 < x_2 < b$ (заметим, что на отрезке $[x_1, x_2]$ уравнения для $y(x, \lambda)$ и $y_n(x)$ не имеют особенностей). В результате получим

$$(\lambda - \lambda_n)\int_{x_1}^{x_2} y(x, \lambda) y_n(x)\rho(x)\,dx + \sigma(x)\rho(x) W(y_n, y)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \tag{9}$$

где

$$W(y_n, y) = y_n(x)\, y'(x, \lambda) - y_n'(x)\, y(x, \lambda)$$

есть вронскиан. При $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ из (9) вытекает, что

$$\lim_{x\to a} \sigma(x)\rho(x) W(y_n, y) = c_1, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to b} \sigma(x)\rho(x) W(y_n, y) = c_2, \tag{11}$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Для доказательства достаточно в (9) перейти к пределу при $x_1 \to a$ (или $x_2 \to b$) и воспользоваться сходимостью интеграла

$$\int_a^b y(x, \lambda)\, y_n(x)\rho(x)\,dx.$$

Сходимость этого интеграла вытекает из неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} y(x,\lambda)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx\right| \leqslant \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} y^2(x,\lambda)\, \rho(x)\, dx \int_{x_1}^{x_2} y_n^2(x)\, \rho(x)\, dx}$$

и сходимости интегралов

$$\int_a^b y^2(x,\lambda)\, \rho(x)\, dx, \quad \int_a^b y_n^2(x)\, \rho(x)\, dx.$$

Соотношения (10), (11) имеют место и при $\lambda = \lambda_n$, если положить $c_1 = c_2 = c$, так как из (9) видно, что при $\lambda = \lambda_n$

$$\sigma(x)\rho(x)W[y_n(x),\ y(x,\lambda)] = \mathrm{const}.$$

Покажем, что постоянная c_2 в (11) должна равняться нулю. Воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y(x,\lambda)}{y_n(x)}\right] = \frac{W[y_n(x),\, y(x,\lambda)]}{y_n^2(x)},$$

откуда

$$y(x,\lambda) = y_n(x)\left[\frac{y(x_0,\lambda)}{y_n(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \frac{W[y_n(s),\, y(s,\lambda)]}{y_n^2(x)}\, ds\right]. \qquad (12)$$

Выберем точку $x_0 < b$ таким образом, чтобы она лежала правее всех нулей полинома $y_n(x)$. При исследовании поведения функции $y(x, \lambda)$, когда $x \to b$, воспользуемся явным видом функции $\rho(x)$ (см. § 5, п. 1). Возможны следующие три случая:

1) b — конечное число и при $x \to b$

$$\sigma(x) \sim b - x, \quad \rho(x) \sim (b-x)^\alpha, \quad \alpha \geqslant 0;$$

2) $b = +\infty$ и при $x \to +\infty$

$$\sigma(x) \sim x, \quad \rho(x) \sim x^\alpha e^{\beta x}, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta < 0;$$

3) $b = +\infty$ и при $x \to +\infty$

$$\sigma(x) = 1, \quad \rho(x) \sim e^{\alpha x^2 + \beta x}, \quad \alpha < 0.$$

Из предельного соотношения (11) при $c_2 \neq 0$ следует, что для подынтегрального выражения в (12) при $s \to b$ справедливо соотношение

$$\frac{W[y_n(s),\, y(s,\lambda)]}{y_n^2(s)} \sim \frac{c_2}{\sigma(s)\,\rho(s)\, y_n^2(s)}.$$

Поэтому при $x \to b$ в случае 1) имеем

$$\int_{x_0}^{x} \frac{W[y_n(s),\, y(s,\lambda)]}{y_n^2(s)}\, ds \sim \begin{cases} \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}, & \alpha > 0, \\ \ln(b-x), & \alpha = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\sqrt{\rho(x)}\,y(x,\lambda)\sim\begin{cases}(b-x)^{-\alpha/2}, & \alpha>0,\\ \ln(b-x), & \alpha=0,\end{cases}$$

т. е. функция $\sqrt{\rho(x)}y(x, \lambda)$ не удовлетворяет условию ограниченности. Поэтому в первом случае следует положить $c_2=0$.

В случаях 2), 3) следует воспользоваться при $s\to+\infty$ асимптотическим поведением входящих в (12) функций:

$$y_n(s)\sim s^n;$$

$$\sigma(s)\rho(s)y_n^2(s)\sim\begin{cases}s^{\alpha+2n+1}e^{\beta s}, & \rho(s)=s^{\alpha}e^{\beta s}, \quad \beta<0,\\ s^{2n}e^{\alpha s^2+\beta s}, & \rho(s)=e^{\alpha s^2+\beta s}, \quad \alpha<0.\end{cases}$$

Если воспользоваться правилом Лопиталя, то при $x\to+\infty$, $c_2\neq0$ получим соответственно

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{W[y_n(s), y(s,\lambda)]}{y_n^2(s)}\,ds\sim\begin{cases}\dfrac{1}{x^{\alpha+2n+1}e^{\beta x}},\\ \dfrac{1}{x^{2n+1}e^{\alpha x^2+\beta x}};\end{cases}$$

$$\sqrt{\rho(x)}\,y(x,\lambda)\sim\begin{cases}x^{-(\alpha/2+n+1)}e^{-\beta x/2},\\ x^{-(n+1)}e^{-(\alpha x^2+\beta x)/2}.\end{cases}$$

В обоих случаях функция $\sqrt{\rho(x)}y(x, \lambda)$ не удовлетворяет условию квадратичной интегрируемости на интервале (a, b). Следовательно, и в этих случаях $c_2=0$. Исследования поведения функции $\sqrt{\rho(x)}y(x, \lambda)$ при $x\to a$, подобные проведенным выше, приводят к равенству $c_1=0$.

Таким образом, мы показали, что при любых значениях n

$$\lim_{x\to a}\sigma(x)\rho(x)W(y_n, y)=0,$$

$$\lim_{x\to b}\sigma(x)\rho(x)W(y_n, y)=0.$$

Эти соотношения возможны лишь при $y(x, \lambda)\equiv0$. Действительно, если $\lambda\neq\lambda_n$ $(n=0, 1, \ldots)$, то из (9) при $x_1\to a$, $x_2\to b$ получим

$$\int\limits_a^b y(x,\lambda)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx=0, \qquad n=0, 1, \ldots$$

В силу замкнутости системы классических ортогональных полиномов это равенство возможно лишь при $y(x,\lambda)=0$ для $x\in(a, b)$.

Если же $\lambda=\lambda_n$, то в силу (10) имеем $W[y_n(x), y(x, \lambda)]=0$, т. е. решения $y_n(x)$ и $y(x, \lambda)$ оказываются линейно зависимыми, что противоречит исходному предположению. Теорема доказана.

3. Задачи квантовой механики, приводящие к классическим ортогональным полиномам. Проиллюстрируем применение доказанной теоремы для решения ряда задач квантовой механики, когда уравнение Шредингера может быть приведено к обобщенному уравнению гипергеометрического типа.

Пример 1. Рассмотрим задачу о нахождении собственных значений энергии E и собственных функций для *линейного гармонического осциллятора*, т. е. для частицы, движущейся в поле с потенциальной энергией $U = m\omega^2x^2/2$ (m — масса частицы, x — отклонение от положения равновесия, ω — круговая частота). Эта задача играет важную роль в квантовой механике, квантовой электродинамике, при рассмотрении колебаний в кристаллах и молекулах.

Уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(x)$ гармонического осциллятора имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2\psi=E\psi,\qquad -\infty<x<\infty.$$

Функция $\psi(x)$ должна быть ограниченной и удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x)\,dx=1.$$

Для решения поставленной задачи вместо координаты x и энергии E удобно ввести безразмерные переменные ξ, ε:

$$x=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\xi=\alpha\xi,\qquad E=\hbar\omega\varepsilon.$$

Тогда получим уравнение

$$\psi''+(2\varepsilon-\xi^2)\psi=0$$

(штрих означает дифференцирование по ξ). Это уравнение является обобщенным уравнением гипергеометрического типа, для которого $\sigma(\xi)=1$, $\tilde{\tau}(\xi)=0$, $\tilde{\sigma}(\xi)=2\varepsilon-\xi^2$.

Поставленная задача принадлежит к типу задач, рассмотренному в п. 1. Действительно, в данном случае $\tilde{\rho}(\xi)=1$. Поэтому требование квадратичной интегрируемости функции $\sqrt{\tilde{\rho}(\xi)}\psi(\xi)$ вытекает из условия нормировки. При решении данной задачи воспользуемся рассмотренным выше методом. Приведем уравнение для функции $\psi(\xi)$ к уравнению гипергеометрического типа, полагая $\psi(\xi)=\varphi(\xi)y(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ является решением уравнения

$$\varphi'/\varphi=\pi(\xi)/\sigma(\xi).$$

Для полинома $\pi(\xi)$ в данном случае получаем выражение

$$\pi(\xi)=\pm\sqrt{k-2\varepsilon+\xi^2}.$$

Постоянная k должна выбираться из условия, чтобы подкоренное выражение имело кратный корень, т. е. $k = 2\varepsilon$. Из двух возможных видов полинома $\pi(\xi) = \pm\xi$ следует выбрать такой, для которого функция

$$\tau(\xi) = \tilde{\tau}(\xi) + 2\pi(\xi)$$

имеет отрицательную производную. Условия, налагаемые на функцию $\tau(\xi)$ будут выполнены, если выбрать $\tau(\xi) = -2\xi$, что соответствует

$$\pi(\xi) = -\xi, \quad \varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2}, \quad \lambda = 2\varepsilon - 1, \quad \rho(\xi) = e^{-\xi^2}.$$

Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0,$$

что дает $\varepsilon = \varepsilon_n = n + 1/2$, т. е.

$$E = E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Собственные функции $y_n(\xi)$ находим по формуле

$$y_n(\xi) = B_n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right).$$

С точностью до множителя они совпадают с полиномами Эрмита $H_n(\xi)$. Для волновой функции $\psi(x)$ получаем выражение

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad x = \alpha\xi, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Постоянную C_n можно найти из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1.$$

Пример 2. Рассмотрим модельную задачу о нахождении собственных значений энергии E и собственных функций для одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + U(x)\psi = E\psi, \quad -\infty < x < \infty,$$

которое описывает движение частицы в поле

$$U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}, \quad U_0 > 0$$

(потенциал Пешля — Теллера, см. Флюгге З. Задачи по квантовой механике, т. 1 — М.: Мир, 1974). Функция $\psi(x)$ должна быть ограниченной и удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)\,dx = 1.$$

Так как $U(x) < 0$, то возможны лишь значения $E < 0$. Для упрощения вида уравнения воспользуемся заменой $s = \operatorname{th} \alpha x$ *). В результате приходим к обобщенному уравнению гипергеометрического типа

$$\Phi'' + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Phi' + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Phi = 0, \quad \Phi(s) = \psi(x),$$

для которого $a = -1$, $b = 1$,

$$\sigma(s) = 1 - s^2, \quad \tilde{\tau}(s) = -2s, \quad \tilde{\sigma}(s) = -\beta^2 + \gamma^2(1 - s^2),$$

$$\beta^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}, \quad \gamma^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2\alpha^2}, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

Поставленная задача принадлежит к рассмотренному типу задач. В данном случае $\tilde{\rho}(s) = 1$. Требование квадратичной интегрируемости функции $\sqrt{\tilde{\rho}(s)}\Phi(s)$ вытекает из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)\,dx = 1$. Действительно,

$$\int\limits_{-1}^{1} \Phi^2(s)\,ds = \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2(x)}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}\,dx < \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)\,dx = \alpha.$$

При решении задачи воспользуемся рассмотренным выше методом. Приведем уравнение для функции $\Phi(s)$ к уравнению гипергеометрического типа

$$\sigma(s)y'' + \tau(s)y' + \lambda y = 0,$$

полагая $\Phi(s) = \varphi(s)y(s)$, где $\varphi(s)$ является решением уравнения

$$\varphi'/\varphi = \pi(s)/\sigma(s).$$

Для полинома $\pi(s)$ в данном случае получаем выражение

$$\pi(s) = \pm\sqrt{\beta^2 - \gamma^2(1 - s^2) + k(1 - s^2)}.$$

Постоянная k должна выбираться из условия, чтобы подкоренное выражение имело кратный корень, т. е. возможны значения $k = \gamma^2$ или $k = \gamma^2 - \beta^2$. В первом случае $\pi(s) = \pm\beta$, во втором $\pi(s) = \pm\beta s$. Из четырех возможных видов полинома $\pi(s)$ следует выбрать такой, для которого функция $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$

*) Во многих модельных задачах квантовой механики, допускающих решение в аналитической форме, уравнение Шредингера приводится к уравнению с рациональными коэффициентами с помощью естественно возникающей замены независимой переменной, которая связана с видом $U(x)$. При этом должно быть соблюдено требование взаимно однозначного соответствия между старой и новой переменными. Так как в данном случае потенциал выражается простым образом через гиперболические функции, то в качестве новой независимой переменной естественно выбрать одну из переменных $\operatorname{sh} \alpha x$, $\operatorname{th} \alpha x$, $e^{\pm\alpha x}$. Мы остановились на замене $s = \operatorname{th} \alpha x$.

имеет отрицательную производную и корень на интервале $(-1, 1)$. Этим условиям удовлетворяет

$$\tau(s) = -2(1+\beta)s,$$

что соответствует

$$\pi(s) = -\beta s, \quad \varphi(s) = (1-s^2)^{\beta/2},$$

$$\lambda = \gamma^2 - \beta^2 - \beta, \quad \rho(s) = (1-s^2)^{\beta}.$$

Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n+1)\sigma'' = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которое приводит к равенству

$$\gamma^2 - \beta^2 - \beta = 2n(1+\beta) + n(n-1).$$

Отсюда получаем собственные значения энергии

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\beta_n^2, \quad \beta_n = -n - \frac{1}{2} + \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{4}}, \quad \beta_n > 0.$$

Условие $\beta_n > 0$ может быть выполнено лишь при

$$n < \sqrt{\gamma^2 + 1/4} - 1/2,$$

т. е. возможно лишь конечное число собственных значений энергии.

Собственные функции $y_n(s)$ в данном случае имеют вид $y_n(s) = P_n^{(\beta,\beta)}(s)$ при $\beta = \beta_n$. Для волновых функций $\psi_n(x)$ получаем выражения

$$\psi_n(x) = C_n(1-s^2)^{\beta/2}P_n^{(\beta,\beta)}(s), \quad \beta = \beta_n, \quad s = \operatorname{th}\alpha x.$$

Здесь C_n — нормировочная постоянная, которая определяется из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2(x)\,dx = 1$.

Другие примеры решения квантовомеханических задач указанным способом будут рассмотрены в § 26.

§ 10. Сферические функции

1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Важным классом специальных функций, тесно связанных с классическими ортогональными полиномами, являются сферические функции. Они возникают, например, при решении уравнения Лапласа в сферических координатах. Так как непрерывные решения уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*, то сферические функции называют также *сферическими гармониками*.