имеет отрицательную производную и корень на интервале $(-1, 1)$. Этим условиям удовлетворяет

$$\tau(s) = -2(1+\beta)s,$$

что соответствует

$$\pi(s) = -\beta s, \quad \varphi(s) = (1-s^2)^{\beta/2},$$

$$\lambda = \gamma^2 - \beta^2 - \beta, \quad \rho(s) = (1-s^2)^{\beta}.$$

Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n+1)\sigma'' = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

которое приводит к равенству

$$\gamma^2 - \beta^2 - \beta = 2n(1+\beta) + n(n-1).$$

Отсюда получаем собственные значения энергии

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\beta_n^2, \quad \beta_n = -n - \frac{1}{2} + \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{4}}, \quad \beta_n > 0.$$

Условие $\beta_n > 0$ может быть выполнено лишь при

$$n < \sqrt{\gamma^2 + 1/4} - 1/2,$$

т. е. возможно лишь конечное число собственных значений энергии.

Собственные функции $y_n(s)$ в данном случае имеют вид $y_n(s) = P_n^{(\beta,\beta)}(s)$ при $\beta = \beta_n$. Для волновых функций $\psi_n(x)$ получаем выражения

$$\psi_n(x) = C_n(1-s^2)^{\beta/2}P_n^{(\beta,\beta)}(s), \quad \beta = \beta_n, \quad s = \operatorname{th}\alpha x.$$

Здесь C_n — нормировочная постоянная, которая определяется из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1$.

Другие примеры решения квантовомеханических задач указанным способом будут рассмотрены в § 26.

§ 10. Сферические функции

1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Важным классом специальных функций, тесно связанных с классическими ортогональными полиномами, являются сферические функции. Они возникают, например, при решении уравнения Лапласа в сферических координатах. Так как непрерывные решения уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*, то сферические функции называют также *сферическими гармониками*.

Найдем ограниченные решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах r, θ, φ. Как известно, в этом случае

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}u,$$

где

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Будем искать частные решения методом разделения переменных, полагая $u = R(r)Y(\theta, \varphi)$. Подставляя это выражение в уравнение Лапласа, получим

$$\frac{r^2\Delta_r R(r)}{R(r)} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)}.$$

Так как левая часть равенства не зависит от переменных θ, φ, а правая часть не зависит от r, то

$$\frac{r^2\Delta_r R}{R} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = \mu,$$

где μ — некоторая постоянная. Для определения функций $R(r)$, $Y(\theta, \varphi)$ имеем уравнения

$$(r^2R')' = \mu R, \tag{1}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y + \mu Y = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) будем решать также методом разделения переменных, полагая $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Это дает

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \mu\sin^2\theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu,$$

где ν — постоянная. Таким образом, для функций $\Phi(\varphi)$ и $\Theta(\theta)$ мы получили уравнения

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + (\mu\sin^2\theta - \nu)\Theta = 0. \tag{4}$$

Из требования однозначности функции $\Phi(\varphi)$ вытекает условие периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. При этом условии решение уравнения (3) возможно лишь в случае, когда $\nu = m^2$, где m — целое число. Мы получаем следующие два линейно независимых решения уравнения (3):

$$\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}, \quad \Phi_{-m}(\varphi) = C_{-m}e^{-im\varphi},$$

где C_m — нормировочная постоянная.

Функции $\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi)\,\Phi_{m'}(\varphi)\,d\varphi = A_m \delta_{mm'},$$

где

$$A_m = 2\pi\,|C_m|^2, \quad \delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & m' = m, \\ 0, & m' \neq m. \end{cases}$$

Удобно выбрать $A_m = 1$, что дает $C_m = 1/\sqrt{2\pi}$, т. е.

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots$$

Перейдем к решению уравнения (4) при $\nu = m^2$. Если положить $\cos\theta = x$, то получим обобщенное уравнение гипергеометрического типа (см. § 1)

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + \left(\mu - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)\Theta = 0, \tag{5}$$

для которого $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tilde{\tau}(x) = -2x$, $\tilde{\sigma}(x) = \mu(1 - x^2) - m^2$.

Задача об определении ограниченного решения уравнения (5) на интервале $(-1, 1)$ принадлежит к типу задач на собственные значения, рассмотренных в § 9, так как в данном случае $\sigma(x)|_{x=\pm 1} = 0$, $\rho(x) = 1$. Поэтому при решении данной задачи мы воспользуемся методом, рассмотренным в § 9.

Приведем уравнение (5) к уравнению гипергеометрического типа, полагая $\Theta(x) = \varphi(x)y(x)$, где $\varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения $\varphi'/\varphi = \pi(x)/\sigma(x)$ ($\pi(x)$ — полином не выше первой степени). Для полинома $\pi(x)$ в данном случае получаем выражение

$$\pi(x) = \pm\sqrt{k(1 - x^2) + m^2 - \mu(1 - x^2)}.$$

Постоянная k должна выбираться так, чтобы подкоренное выражение имело кратный корень. В результате получаем следующие возможные виды полинома $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \begin{cases} \pm m, & k = \mu, \\ \pm mx, & k = \mu - m^2. \end{cases}$$

Из всех видов $\pi(x)$ следует выбрать такой, для которого функция

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) + 2\pi(x)$$

имеет отрицательную производную и корень на интервале $(-1, 1)$. При $m \geqslant 0$ этим условиям удовлетворяет функция

$$\tau(x) = -2(m + 1)x,$$

что соответствует

$$\pi(x) = -mx, \quad \varphi(x) = (1-x^2)^{m/2},$$
$$\lambda = \mu - m(m+1), \quad \rho(x) = (1-x^2)^m.$$

Собственные значения μ определяются из уравнения

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0,$$

что дает $\mu = \mu_n = l(l+1)$, где $l = n + m$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Функции $y_n(x)$ в данном случае имеют вид

$$y_n(x) = \frac{B_{nm}}{(1-x^2)^m}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+m}\right]$$

и совпадают с точностью до множителя с полиномами Якоби $P_n^{(m,m)}(x)$. Так как $n = l - m$, где l — целое число, удовлетворяющее условию $l \geqslant m$, то при $m \geqslant 0$ имеем

$$\Theta(x) \equiv \Theta_{lm}(x) = C_{lm}(1-x^2)^{m/2}P_{l-m}^{(m,m)}(x), \tag{6}$$

где C_{lm} — нормировочная постоянная. Функции $\Theta_{lm}(x)$, очевидно, удовлетворяют условиям ортогональности, вытекающим из свойств ортогональности полиномов Якоби:

$$\int_{-1}^{1}\Theta_{lm}(x)\,\Theta_{l'm}(x)\,dx = A_{lm}\delta_{ll'},$$

где

$$A_{lm} = C_{lm}^2\int_{-1}^{1}\left[P_{l-m}^{(m,m)}(x)\right]^2(1-x^2)^m dx.$$

Удобно выбрать *) $A_{lm} = 1$, что дает

$$C_{lm} = \frac{1}{2^m l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}(l-m)!\,(l+m)!}.$$

Приведем несколько различных видов записи для функции $\Theta_{lm}(x)$ при $m \geqslant 0$, вытекающих из свойств полиномов Якоби. Из формулы дифференцирования (5.6) для полиномов Якоби следует, что

$$P_{l-m}^{(m,m)}(x) = \frac{2^m l!}{(l+m)!}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x),$$

где $P_l(x) = P_l^{(0,0)}(x)$ — полином Лежандра.

*) Выбор знака у постоянной C_{lm} не однозначен. Мы следуем нормировке, принятой в [2].

Таким образом, при $m \geqslant 0$

$$\Theta_{lm}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(x),$$

где

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}.$$

Функции $P_l^m(x)$ называются *присоединенными функциями Лежандра 1-го рода.*

Явное выражение для функций $\Theta_{lm}(x)$ можно получить, если воспользоваться формулами Родрига для $P_l(x)$ и $P_{l-m}^{(m,\,m)}(x)$:

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l, \tag{7}$$

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}(1-x^2)^{-m/2}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(1-x^2)^l. \tag{8}$$

Доопределим функции $\Theta_{lm}(x)$ при $m < 0$ с помощью этих соотношений; тогда получим

$$\Theta_{l,\,-m}(x) = (-1)^m\Theta_{lm}(x). \tag{9}$$

Отсюда видно, что функции $\Theta_{lm}(x)$ при $m < 0$ будут по-прежнему являться решениями уравнения (5). Таким образом, уравнение (2) при $\mu = l(l+1)$ имеет ограниченные однозначные решения

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\Theta_{lm}(\cos\theta), \qquad -l \leqslant m \leqslant l. \tag{10}$$

Функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ называются *сферическими функциями порядка* l.

Приведем явные выражения сферических функций для некоторых наиболее простых случаев:

$$Y_{l0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta), \tag{11}$$

$$Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\cos\theta e^{\pm i\varphi}. \tag{12}$$

Легко проверить, что функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\int_\Omega Y_{lm}(\theta,\varphi)\,Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\,d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{13}$$

Здесь интегрирование производится по телесному углу

$$d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Из (9), (10) видно, что

$$Y^*_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\cos\theta)\,\Phi_{-m}(\varphi) = (-1)^m\, Y_{l,-m}(\theta, \varphi). \qquad (14)$$

Таким образом, мы получили в явном виде функции $Y(\theta, \varphi)$, определяющие зависимость от углов ограниченного решения $u = R(r)Y(\theta, \varphi)$ уравнения Лапласа.

Для определения функции $R(r)$ получаем из (1) уравнение Эйлера

$$r^2R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$R(r) = c_1 r^l + c_2 r^{-l-1},$$

где c_1, c_2 — постоянные. Следовательно, частными решениями уравнения Лапласа являются функции $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ и $\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$, первые из которых применяются при решении внутренних, а вторые — при решении внешних краевых задач для шаровой области. Эти функции называются *шаровыми функциями*.

Замечание. Другой подход к изучению сферических функций, основанный на использовании представлений группы вращений, рассмотрен, например, в [6]. Этот подход находит применение при изучении теории момента количества движения в квантовой механике.

2. Свойства сферических функций. Рассмотрим основные свойства функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

1) Из рекуррентного соотношения для полиномов Якоби и связи функций $\Theta_{lm}(x)$ с полиномами Якоби $P^{(m,m)}_{l-m}(x)$ при $m \geqslant 0$ легко выводится рекуррентное соотношение для функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ по индексу l:

$$\cos\theta\cdot Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}}\, Y_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}\, Y_{l-1,m}.$$

Полученная формула сохраняет свой вид при $m < 0$, в чем нетрудно убедиться с помощью (14).

2) Дифференцируя соотношение (7), получим формулу дифференцирования

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx} = -\frac{mx}{1-x^2}\,\Theta_{lm} + \sqrt{\frac{l(l+1) - m(m+1)}{1-x^2}}\,\Theta_{l,m+1}.$$

Заменяя здесь m на $-m$ и используя (9), можно получить другую формулу дифференцирования

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx} = \frac{mx}{1-x^2}\,\Theta_{lm} - \sqrt{\frac{l(l+1) - m(m-1)}{1-x^2}}\,\Theta_{l,m-1}.$$

В формулах дифференцирования следует полагать $\Theta_{lm}(x) = 0$ при $m = \pm(l+1)$.

Приравнивая два выражения для $d\Theta_{lm}/dx$, приходим к рекуррентному соотношению для функции $\Theta_{lm}(x)$ по индексу m:

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}\Theta_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,\Theta_{l,m+1} - \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\Theta_{l,m-1}.$$

Если использовать (10), можно получить *формулы дифференцирования* для сферических функций. Так как

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{d\Theta_{lm}(x)}{dx}\bigg|_{x=\cos\theta},$$

то формулы дифференцирования для $\Theta_{lm}(x)$ можно переписать в виде

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}+m\operatorname{ctg}\theta\cdot Y_{lm}\right) = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_{l,m\pm1}. \tag{15}$$

В (15) следует полагать $Y_{lm}(\theta,\varphi)=0$ при $m=\pm(l+1)$.

Из явного вида сферических функций вытекает также формула дифференцирования по углу φ:

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = imY_{lm}(\theta,\varphi). \tag{16}$$

3) Выведем *интегральное представление* для функции $Y_{lm}(\theta,\varphi)$. Для этого в (7) представим функцию $\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l$ с помощью интегральной формулы Коши

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l = \frac{(l+m)!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{(1-s^2)^l}{(s-x)^{l+m+1}}ds,$$

где C — контур, охватывающий точку $s=x$. В качестве контура C удобно выбрать окружность с центром в точке $s=x$ радиуса $\sqrt{1-x^2}$. Тогда, полагая $s=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\alpha}$, получим

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l = \frac{(-2)^l(l+m)!}{2\pi}(1-x^2)^{-m/2}\int\limits_0^{2\pi}e^{-im\alpha}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\alpha\right)^l d\alpha.$$

Подставляя полученное выражение в (7) и используя (10), получим интегральное представление для $Y_{lm}(\theta,\varphi)$:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = B_{lm}\int\limits_0^{2\pi}e^{-im(\alpha-\varphi)}(\cos\theta+i\sin\theta\sin\alpha)^l d\alpha = B_{lm}\int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}e^{-im\alpha}[\cos\theta+i\sin\theta\sin(\alpha+\varphi)]^l d\alpha,$$

где

$$B_{lm} = \frac{1}{4\pi l!}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}(l-m)!\,(l+m)!}.$$

Так как интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от положения этого отрезка, то

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = B_{lm}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha}[\cos\theta + i\sin\theta\sin(\alpha+\varphi)]^l\,d\alpha. \qquad (17)$$

3. Связь однородных гармонических полиномов и сферических функций. Решая уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах, мы нашли ограниченные при $r \to 0$ частные решения этого уравнения

$$u_{lm}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

С помощью интегрального представления (17) функции $u_{lm}(r, \theta, \varphi)$ можно записать в декартовых координатах

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Имеем

$$u_{lm}(r,\theta,\varphi) = B_{lm}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha}[r\cos\theta + ir\sin\theta\sin(\alpha+\varphi)]^l d\alpha =$$

$$= B_{lm}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha}(z + ix\sin\alpha + iy\cos\alpha)^l\,d\alpha.$$

Отсюда видно, что функция $u_{lm}(r, \theta, \varphi)$ является однородным полиномом степени l относительно переменных x, y, z.

Напомним, что *однородным полиномом степени* l называется выражение вида

$$u_l(x, y, z) = \sum_{l_1, l_2, l_3} c_{l_1 l_2 l_3} x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3},$$

где суммирование производится по неотрицательным индексам l_1, l_2, l_3, сумма которых равна l. Однородным полиномом является, например, выражение $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Подсчитаем число линейно независимых однородных полиномов степени l. Для этого достаточно перебрать все возможные комбинации значений l_1 и l_2, так как при фиксированном l однозначно определяется $l_3 = l - l_1 - l_2$. При заданном l_1 значение l_2 меняется от $l_2 = 0$ до $l_2 = l - l_1$, т. е. принимает $l - l_1 + 1$ значений. Поэтому общее число линейно независимых однородных полиномов степени l равно

$$N_1 = \sum_{l_1=0}^{l} (l - l_1 + 1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа, называется *однородным гармоническим полиномом.* Выражение $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ является примером однородного гармонического полинома.

Из однородных полиномов r^2 и $r^{l-2n} Y_{l-2n,\, m}(\theta, \varphi)$ можно составить однородные полиномы степени l

$$u_{lmn}(x, y, z) = (r^2)^n r^{l-2n} Y_{l-2n,\, m}(\theta, \varphi) = r^l Y_{l-2n,\, m}(\theta, \varphi).$$

Здесь индексы m, n принимают целые значения, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant 2n \leqslant l, \quad -(l-2n) \leqslant m \leqslant l - 2n.$$

В силу линейной независимости сферических функций $Y_{l-2n,\, m}(\theta, \varphi)$, вытекающей из их ортогональности, однородные полиномы $u_{lmn}(x, y, z)$ будут линейно независимы. При фиксированном значении $l - 2n$ число возможных значений m равно $2(l - 2n) + 1$. Поэтому полное число рассматриваемых однородных полиномов будет равно

$$\sum_n [2(l-2n) + 1] = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Так как число построенных нами однородных полиномов равно полному числу линейно независимых однородных полиномов степени l, то произвольный однородный полином степени l можно представить в виде линейной комбинации однородных полиномов $r^l Y_{l-2n,\, m}(\theta, \varphi)$, т. е.

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m,n} c_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi). \tag{18}$$

Мы получили разложение произвольного однородного полинома по сферическим функциям. С помощью разложения (18) нетрудно показать, что *произвольный однородный гармонический полином степени l является линейной комбинацией однородных гармонических полиномов $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$.*

Действительно, пусть $u_l(x, y, z)$ — однородный гармонический полином, т. е. $\Delta u_l = 0$. Тогда, применяя оператор Лапласа $\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}$ к разложению (18), получим

$$\Delta u_l = r^{l-2} \sum_{m,n} [l(l+1) - (l-2n)(l-2n+1)]\, c_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi) =$$

$$= r^{l-2} \sum_{m,n} 2n(2l - 2n + 1)\, c_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi) = 0.$$

В силу линейной независимости сферических функций $Y_{l-2n,\, m}(\theta, \varphi)$

получаем равенство

$$2n(2l-2n+1)c_{mn}=0,$$

т. е. $c_{mn}=0$ при $n>0$, что и требовалось доказать.

4. Обобщенные сферические функции. При вращении системы координат однородный полином переходит в однородный полином той же степени. С другой стороны, при таком вращении оператор Лапласа сохраняет свой вид, т. е. $\Delta_{xyz}=\Delta_{x'y'z'}$. Поэтому любые однородные гармонические полиномы при вращении системы координат переходят в однородные гармонические полиномы той же степени. Отсюда

$$u_{lm}(x,y,z)=\sum_{m'} D^l_{mm'}u_{lm'}(x',y',z'),$$

где $u_{lm}(x,\ y,\ z)=r^lY_{lm}(\theta,\ \varphi)$. Следовательно,

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sum_{m'=-l}^{l} D^l_{mm'}Y_{lm'}(\theta',\varphi'). \tag{19}$$

Таким образом, линейные комбинации функций $Y_{lm}(\theta,\ \varphi)$ при фиксированном l образуют $(2l+1)$-мерное пространство функций, инвариантное относительно вращений.

Коэффициенты $D^l_{mm'}$, очевидно, будут зависеть от параметров, определяющих поворот системы координат. Произвольный поворот координатной системы относительно начала координат полностью определяется заданием трех вещественных параметров. Действительно, любой поворот можно охарактеризовать однозначно указанием направления оси поворота (два параметра) и величиной угла поворота (один параметр). Наиболее часто в качестве параметров, характеризующих поворот, употребляются *углы Эйлера* α, β, γ, которые позволяют описать произвольный поворот с помощью трех последовательных поворотов вокруг координатных осей: а) поворот вокруг оси z на угол α; б) поворот вокруг нового направления оси y на угол β; в) поворот вокруг нового направления оси z на угол γ *). Таким образом,

$$D^l_{mm'}=D^l_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma).$$

В дальнейшем матрицу с элементами $D^l_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)$ мы будем обозначать $D(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ и называть *матрицей конечных вращений.*

Произвольный поворот однозначно определяется углами Эйлера, если они меняются в следующих пределах: $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\gamma<2\pi$. Если же углы Эйлера не находятся в этих пределах, то следует иметь в виду, что поворот с углами

---

*) Иногда при введении углов Эйлера поворот на угол β совершают не вокруг нового направления оси y, а вокруг нового направления оси x. Углы Эйлера α', β', γ', введенные таким способом, связаны с углами Эйлера α, β, γ соотношениями $\alpha'=\alpha+\pi/2$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma-\pi/2$.

$(\alpha + 2\pi n_1,\ \beta + 2\pi n_2,\ \gamma + 2\pi n_3)$ совпадает с поворотом (α, β, γ), если n_1, n_2, n_3 — целые числа. Поэтому

$$D(\alpha + 2\pi n_1,\ \beta + 2\pi n_2,\ \gamma + 2\pi n_3) = D(\alpha, \beta, \gamma).$$

Кроме того, заметим, что поворот (α, β, γ) эквивалентен повороту $(\pi + \alpha, -\beta, \pi + \gamma)$.

Обратный поворот будет характеризоваться углами

$$\alpha_1 = -\gamma, \quad \beta_1 = -\beta, \quad \gamma_1 = -\alpha,$$

что эквивалентно повороту

$$(\pi + \alpha_1, -\beta_1, \pi + \gamma_1) = (\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha).$$

Поэтому матрица обратного поворота совпадает с матрицей поворота $(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)$, т. е.

$$D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha).$$

Функции $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ носят название *обобщенных сферических функций*, так как для ряда частных случаев они совпадают с обычными сферическими функциями. Их называют также *D-функциями Вигнера*. Обобщенные сферические функции широко используются в квантовой механике *).

Выведем ряд основных свойств обобщенных сферических функций и получим для них явное выражение через параметры α, β, γ. Так как при вращении системы координат элемент телесного угла не меняется, т. е. $d\Omega = d\Omega'$, то из условий ортогональности

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi)\, Y^*_{lm_1}(\theta, \varphi)\, d\Omega = \delta_{mm_1},$$

$$\int Y_{lm'}(\theta', \varphi')\, Y^*_{lm'_1}(\theta', \varphi')\, d\Omega' = \delta_{m'm'_1}$$

вытекает соотношение

$$\sum_{m'} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) \left[D^l_{m_1m'}(\alpha, \beta, \gamma)\right]^* = \delta_{mm_1},$$

т. е. матрица $D^+(\alpha, \beta, \gamma)$, являющаяся транспонированной и комплексно сопряженной к матрице $D(\alpha, \beta, \gamma)$, совпадает с $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)$. Это означает, что матрица $D(\alpha, \beta, \gamma)$ унитарна. В связи с этим из (19) получаем

$$Y_{lm'}(\theta', \varphi') = \sum_m \left[D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)\right]^* Y_{lm}(\theta, \varphi). \qquad (20)$$

При использовании равенств $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)$,

*) См., например, Давыдов А. С. Квантовая механика.— М.: Наука, 1973; Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.

$D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D^{+}(\alpha, \beta, \gamma)$, получим следующее соотношение:

$$D^l_{mm'}(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha) = \left[D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)\right]^*. \tag{21}$$

Другое простейшее свойство обобщенных сферических функций легко получается из свойства (14) сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-m'}\left[D^l_{-m,-m'}(\alpha, \beta, \gamma)\right]^*. \tag{22}$$

Перейдем к получению явных выражений для обобщенных сферических функций $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$. Пусть совершаются последовательно два поворота, определяемые параметрами α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2, эквивалентные одному повороту с параметрами α, β, γ, причем в результате первого поворота сферические координаты (θ, φ) некоторого фиксированного вектора переходят в сферические координаты (θ_1, φ_1), а в результате второго поворота координаты (θ_1, φ_1) переходят в (θ', φ'). Тогда

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1),$$

$$Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{m'} D^l_{m_1m'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

С другой стороны,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Из сопоставления этих разложений в силу линейной независимости сферических функций находим

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, D^l_{m_1m'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

т. е.

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) D(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

так что при последовательном выполнении двух вращений их матрицы перемножаются в обратном порядке. Аналогичное соотношение имеет место при выполнении нескольких последовательных поворотов системы координат. Из этого рассуждения и определения углов Эйлера вытекает, что для нахождения вида обобщенных сферических функций $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ надо найти их выражения лишь для случаев, когда повороты совершаются вокруг оси z и оси y. Обозначим через $C^l_{mm'}(\alpha)$ и $d^l_{mm'}(\beta)$ обобщенные сферические функции, соответствующие повороту на угол α вокруг оси z и на угол β вокруг оси y. Тогда имеем

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1m_2} C^l_{mm_1}(\alpha)\, d^l_{m_1m_2}(\beta)\, C^l_{m_2m'}(\gamma).$$

Получим явные выражения для функций $C^l_{mm'}(\alpha)$. При вращении на угол α вокруг оси z сферические координаты (θ, φ)

некоторого фиксированного вектора переходят в координаты $\theta' = \theta$, $\varphi' = \varphi - \alpha$. Поэтому

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta', \varphi' + \alpha) = e^{im\alpha} Y_{lm}(\theta', \varphi').$$

С другой стороны,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} C^l_{mm'}(\alpha)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Отсюда

$$C^l_{mm'}(\alpha) = e^{im\alpha}\delta_{mm'}$$

и, следовательно,

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(m\alpha + m'\gamma)} d^l_{mm'}(\beta). \qquad (23)$$

Найдем теперь функции $d^l_{mm'}(\beta)$, соответствующие вращению системы координат на угол β вокруг оси y. В этом случае

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} d^l_{mm'}(\beta)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \qquad (24)$$

Новые координаты (x', y', z') связаны со старыми (x, y, z) соотношениями

$$x = x' \cos\beta + z' \sin\beta, \quad y = y', \quad z = z' \cos\beta - x' \sin\beta.$$

Переходя к сферическим координатам, находим связь (θ, φ) с (θ', φ'):

$$\begin{aligned} \sin\theta\cos\varphi &= \sin\theta'\cos\varphi'\cos\beta + \cos\theta'\sin\beta, \\ \sin\theta\sin\varphi &= \sin\theta'\sin\varphi', \\ \cos\theta &= \cos\theta'\cos\beta - \sin\theta'\cos\varphi'\sin\beta. \end{aligned} \qquad (25)$$

Для определения $d^l_{mm'}(\beta)$ найдем дифференциальные соотношения между этими функциями. Так как в правой части (24) наиболее просто произвести дифференцирование по β и φ', то будем рассматривать это соотношение при фиксированном значении θ', считая переменные θ и φ функциями переменных β и φ'. Поэтому

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\beta} = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial\varphi'} = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi'} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi'}.$$

Производные $\partial\theta/\partial\beta$, $\partial\theta/\partial\varphi'$, $\partial\varphi/\partial\beta$, $\partial\varphi/\partial\varphi'$ вычислим с помощью соотношений (25). Дифференцирование последнего из этих соотношений дает

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\varphi'} = -\sin\beta\sin\varphi.$$

Производные $\partial\varphi/\partial\beta$, $\partial\varphi/\partial\varphi'$ легко определяются с помощью дифференцирования соответственно второго и первого из соотношений (25):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi'} = -\sin\beta\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi + \cos\beta.$$

Отсюда

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\beta} = \cos\varphi\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} - im\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi'} = -\sin\beta\left[\sin\varphi\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} + im\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\, Y_{lm}(\theta,\varphi)\right] + \\ + im\cos\beta Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Для вычисления производной $\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)/\partial\theta$ воспользуемся формулами дифференцирования (15). Так как в (15) входят величины $e^{\pm i\varphi}\partial Y_{lm}/\partial\theta$, а в выражения $\partial Y_{lm}/\partial\beta$ и $\partial Y_{lm}/\partial\varphi'$ — величины $\cos\varphi\partial Y_{lm}/\partial\theta$, $\sin\varphi\partial Y_{lm}/\partial\theta$, то для того, чтобы воспользоваться формулами (15), предварительно составим соответствующие линейные комбинации из величин $\partial Y_{lm}/\partial\beta$ и $\partial Y_{lm}/\partial\varphi'$. Имеем

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\beta} \mp \frac{i}{\sin\beta}\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi'} = e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \mp m\operatorname{ctg}\theta Y_{lm}\right] \pm \\ \pm m\operatorname{ctg}\beta Y_{lm} = \mp\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_{l,m\pm1}(\theta,\varphi) \pm \\ \pm m\operatorname{ctg}\beta Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Если воспользоваться разложением (24) для величин $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, $Y_{l,m\pm1}(\theta,\varphi)$ и приравнять в левой и правой частях равенства коэффициенты при $Y_{lm'}(\theta',\varphi')$, то получим искомые дифференциальные соотношения для функции $d^l_{mm'}(\beta)$:

$$\frac{d}{d\beta}d^l_{mm'} \pm \frac{m'-m\cos\beta}{\sin\beta}d^l_{mm'} = \mp\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,d^l_{m\pm1,m'}. \tag{26}$$

Здесь следует полагать $d^l_{\pm(l+1),m'}(\beta) = 0$. С помощью соотношений (26) и условия $d^l_{mm'}(0) = \delta_{mm'}$, вытекающего из (24) при $\beta = 0$, можно однозначно определить все функции $d^l_{mm'}(\beta)$, если рассматривать соотношение (26) как линейное дифференциальное уравнение относительно $d^l_{mm'}(\beta)$, считая функцию $d^l_{m\pm1,m'}(\beta)$ заданной. После умножения (26) на интегрирующий множитель

$$\exp\left\{\pm\int\frac{m'-m\cos\beta}{\sin\beta}d\beta\right\} = (1-\cos\beta)^{\pm(m'-m)/2}(1+\cos\beta)^{\mp(m'+m)/2}$$

получим

$$\frac{d}{d\beta}\left[(1-\cos\beta)^{\pm(m'-m)/2}(1+\cos\beta)^{\mp(m'+m)/2}d^l_{mm'}(\beta)\right] = \\ = \mp\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}(1-\cos\beta)^{\pm(m'-m)/2}\times \\ \times(1+\cos\beta)^{\mp(m'+m)/2}d^l_{m\pm1,m'}(\beta). \tag{27}$$

Используя верхние знаки и полагая $m = l$, находим

$$(1-\cos\beta)^{(m'-l)/2}(1+\cos\beta)^{-(m'+l)/2}d^l_{lm'}(\beta) = \text{const}.$$

Отсюда

$$d^l_{lm'}(\beta) = C_{lm'}(1-\cos\beta)^{(l-m')/2}(1+\cos\beta)^{(l+m')/2},$$

где $C_{lm'}$ — нормировочная постоянная. Функции $d^l_{mm'}(\beta)$ при $m < l$ можно выразить рекуррентным образом через $d^l_{lm'}(\beta)$, взяв в (27) нижние знаки. Произведя замену переменных

$$x = \cos\beta, \quad v_{mm'}(x) = (1-x)^{(m-m')/2}(1+x)^{(m+m')/2}d^l_{mm'}(\beta),$$

получим

$$v_{m-1,m'} = -\frac{1}{\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}}\frac{dv_{mm'}}{dx},$$

откуда

$$v_{mm'} = (-1)^{l-m}\prod_{s=m+1}^{l}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)-s(s-1)}}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}v_{lm'},$$

т. е.

$$d^l_{mm'}(\beta) = C_{lm'}\frac{(-1)^{l-m}(1-x)^{(m'-m)/2}(1+x)^{-(m'+m)/2}}{\prod\limits_{s=m+1}^{l}\sqrt{l(l+1)-s(s-1)}}\times$$

$$\times\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left[(1-x)^{l-m'}(1+x)^{l+m'}\right]. \quad (28)$$

Для определения постоянной $C_{lm'}$ воспользуемся равенством $d^l_{m'm'}(0) = 1$. Произведя в (28) дифференцирование по формуле Лейбница, получим

$$d^l_{m'm'}(0) = C_{lm'}\frac{2^{-m'}2^{l+m'}(l-m')!}{\prod\limits_{s=m'+1}^{l}\sqrt{l(l+1)-s(s-1)}} = 1.$$

Это дает

$$C_{lm'} = \frac{\prod\limits_{s=m'+1}^{l}\sqrt{l(l+1)-s(s-1)}}{2^l(l-m')!}.$$

Так как

$$\prod_{s=m+1}^{l}[l(l+1)-s(s-1)] = \prod_{s=m+1}^{l}(l+s)(l-s+1) = \frac{(2l)!\,(l-m)!}{(l+m)!},$$

то окончательно получаем

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l(l-m)!}\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}}\times$$

$$\times(1-x)^{(m'-m)/2}(1+x)^{-(m'+m)/2}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}\left[(1-x)^{l-m'}(1+x)^{l+m'}\right]. \quad (29)$$

Отметим, что величины $d^l_{mm'}(\beta)$ вещественны. Их можно выразить через полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ при $x=\cos\beta$:

$$d^l_{mm'}(\beta)=\frac{1}{2^m}\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}}\times$$
$$\times(1-x)^{(m-m')/2}(1+x)^{(m+m')/2}P_{l-m}^{(m-m',m+m')}(x). \quad (29\text{a})$$

Функции $d^l_{mm'}(\beta)$ можно записать в другом виде, если воспользоваться соотношениями симметрии, вытекающими из (21)—(23) и вещественности функций $d^l_{mm'}(\beta)$:

$$d^l_{mm'}=(-1)^{m-m'}d^l_{m'm},\quad d^l_{mm'}=(-1)^{m-m'}d^l_{-m,-m'}. \quad (30)$$

С помощью соотношений (30) всегда можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства

$$m-m'\geqslant 0,\quad m+m'\geqslant 0.$$

Рассмотрим частный случай формулы (29) при $m'=0$. Сравнивая формулу (29) при $m'=0$ и (8), имеем

$$d^l_{m0}(\beta)=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}\,\Theta_{lm}(x),$$

откуда

$$D^l_{m0}(\alpha,\beta,\gamma)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\beta,\alpha), \quad (31)$$
$$D^l_{00}(\alpha,\beta,\gamma)=P_l(\cos\beta).$$

С помощью (21) можно получить другое аналогичное соотношение:

$$D^l_{0m}(\alpha,\beta,\gamma)=(-1)^m\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\beta,\gamma).$$

5. Теорема сложения. Выведем одно полезное соотношение для сферических функций, известное под названием теоремы сложения. Для этого положим в (20) $m'=0$ и воспользуемся формулами (11), (31):

$$P_l(\cos\theta')=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_m Y_{lm}(\theta,\varphi)\,Y^*_{lm}(\beta,\alpha). \quad (32)$$

Соотношению (32) можно придать простой геометрический смысл. Для этого рассмотрим два произвольных вектора $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, направления которых характеризуются сферическими координатами (θ_1,φ_1), (θ_2,φ_2). Пусть угол между этими векторами равен ω. Положим в (32) $\theta=\theta_1$, $\varphi=\varphi_1$ и совершим поворот (α,β,γ) таким образом, чтобы направление новой оси z совпало с направлением вектора $\mathbf{r}_2$. Очевидно, что углы α, β будут сферическими углами новой оси z в старой системе координат. Отсюда легко видеть, что $\alpha=\varphi_2$, $\beta=\theta_2$, а угол ω между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ совпадает с θ'. В результате формула (32) примет вид

$$P_l(\cos\omega)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\,Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2). \quad (33)$$

Соотношение (33) называется *теоремой сложения для сферических функций*. Оно имеет многочисленные приложения, например в теории атомных спектров. Особенно часто формула (33) используется при разложении величины $1/|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ в ряд по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)$, $Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2)$. Так как (см. § 5)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\omega),$$

то по теореме сложения для сферических функций получим

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2), \tag{34}$$

где $r_<=\min(r_1, r_2)$, $r_>=\max(r_1, r_2)$.

Примеры. 1. Рассмотрим потенциал

$$u(\mathbf{r})=\int\limits_V\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau', \tag{35}$$

создаваемый электрическим зарядом с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, находящимся в некотором объеме V. Для вычисления потенциала $u(\mathbf{r})$ на больших расстояниях от объема V удобно получить его разложение по степеням $1/r$, выбирая начало координат внутри объема V. Используя разложение (34) при $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}'$ и $r>r'$, выражение (35) можно представить в виде

$$u(\mathbf{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{36}$$

где

$$Q_{lm}=\frac{4\pi}{2l+1}\int\limits_V r'^l\rho(\mathbf{r}')Y_{lm}(\theta', \varphi')\,d\tau'. \tag{37}$$

Формулу (36) обычно называют *разложением потенциала по мультиполям.*

Если объем V имеет форму шара $0<r'<a$ и $\rho(\mathbf{r}')=\rho(r')$, то интеграл (37) легко вычисляется: $Q_{lm}=\sqrt{4\pi}\,Q\delta_{l0}\,\delta_{m0}$, где Q — суммарный заряд. В этом случае $u(r)=Q/r$, как и следовало ожидать.

2. Используем теорему сложения (33) при решении *первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в шаровой области*:

$$\Delta u=0, \quad u(r, \theta, \varphi)|_{r=a}=f(\theta, \varphi).$$

Решение этой задачи будем искать методом разделения переменных в виде ряда по шаровым функциям $r^lY_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{l,m}C_{lm}\left(\frac{r}{a}\right)^lY_{lm}(\theta, \varphi). \tag{38}$$

Коэффициенты C_{lm} находятся из граничного условия на сфере $r=a$ и ортонормированности сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

Поэтому

$$C_{lm} = \int f(\theta', \varphi')\, Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\, d\Omega'.$$

Решение (38) можно представить также в виде интеграла. Для этого подставим выражение для C_{lm} в (38), поменяем местами суммирование и интегрирование, а затем произведем суммирование по m с помощью теоремы сложения:

$$u(r, \theta, \varphi) = \int f(\theta', \varphi') \left[\sum_{l,m} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)\, Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\right] d\Omega' =$$

$$= \int f(\theta', \varphi') \left[\sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu)\right] d\Omega'.$$

Здесь μ — косинус угла между направлениями (θ, φ) и (θ', φ'):

$$\mu = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Чтобы произвести суммирование по l, воспользуемся производящей функцией для полиномов Лежандра:

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\mu + t^2}}.$$

Так как

$$\sum_l (2l+1)\, t^l P_l(\mu) = 2\sqrt{t} \sum_l \left(l + \frac{1}{2}\right) t^{l-1/2} P_l(\mu) =$$

$$= 2\sqrt{t}\, \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1 - 2t\mu + t^2}}\right) = \frac{1 - t^2}{(1 - 2t\mu + t^2)^{3/2}},$$

то

$$\sum_l (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu) = \frac{1 - (r/a)^2}{[1 - 2\mu r/a + (r/a)^2]^{3/2}}$$

и, следовательно, решение первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в шаровой области представляется в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi')\, \frac{1 - (r/a)^2}{[1 - 2\mu r/a + (r/a)^2]^{3/2}}\, d\Omega'.$$

§ 11. Функции второго рода

1. Интегральное представление. Как было показано в § 3, дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов имеет решения вида

$$y(z) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^n(s)\, \rho(s)}{(s - z)^{n+1}}\, ds, \tag{1}$$

где контур C выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось