

Поэтому

$$C_{lm} = \int f(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega'.$$

Решение (38) можно представить также в виде интеграла. Для этого подставим выражение для  $C_{lm}$  в (38), поменяем местами суммирование и интегрирование, а затем произведем суммирование по  $m$  с помощью теоремы сложения:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \int f(\theta', \varphi') \left[ \sum_{l,m} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \right] d\Omega' = \\ &= \int f(\theta', \varphi') \left[ \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu) \right] d\Omega'. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu$  — косинус угла между направлениями  $(\theta, \varphi)$  и  $(\theta', \varphi')$ :  
 $\mu = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$ .

Чтобы произвести суммирование по  $l$ , воспользуемся производящей функцией для полиномов Лежандра:

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_l (2l+1) t^l P_l(\mu) &= 2\sqrt{t} \sum_l \left(l + \frac{1}{2}\right) t^{l-1/2} P_l(\mu) = \\ &= 2\sqrt{t} \frac{d}{dt} \left( \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}} \right) = \frac{1-t^2}{(1-2t\mu+t^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

то

$$\sum_l (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu) = \frac{1-(r/a)^2}{[1-2\mu r/a + (r/a)^2]^{3/2}}$$

и, следовательно, решение первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в шаровой области представляется в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int f(\theta', \varphi') \frac{1-(r/a)^2}{[1-2\mu r/a + (r/a)^2]^{3/2}} d\Omega'.$$

## § 11. Функции второго рода

**1. Интегральное представление.** Как было показано в § 3, дифференциальное уравнение для классических ортогональных полиномов имеет решения вида

$$y(z) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds, \quad (1)$$

где контур  $C$  выбирается таким образом, чтобы удовлетворялось

условие

$$\frac{\sigma^{n+1}(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+2}} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad (2)$$

где  $s_1, s_2$  — концы контура. Замкнутый контур, охватывающий точку  $s=z$ , дает при  $C_n = \frac{B_n n!}{2\pi i}$  классические полиномы  $y_n(z)$ , ортогональные на интервале  $(a, b)$ . Другой возможный вид контура  $C$  при  $z \notin [a, b]$  — отрезок прямой, соединяющий точки  $s_1 = a$  и  $s_2 = b$ . Условие (2) в данном случае выполняется в силу условия (5.17). Соответствующее решение при  $C_n = B_n n!$  называется *функцией второго рода* и обозначается  $Q_n(z)$ :

$$Q_n(z) = \frac{B_n n!}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds. \quad (3)$$

Из явного вида функции  $\rho(z)$  (см. § 5) нетрудно заметить, что эта функция может иметь точки ветвления при  $z=a$  и  $z=b$ . В таких случаях для однозначности функции  $Q_n(z)$  необходимо провести разрезы на плоскости комплексной переменной  $z$ , например разрез  $(a, +\infty)$  от точки  $z=a$  вдоль вещественной оси вправо. При этом можно считать, что  $\rho(x+i0) = \rho(x)$  при  $x \in (a, b)$ .

Интегрируя в (3) по частям  $n$  раз, получим интегральное представление, связывающее  $Q_n(z)$  с полиномами  $y_n(z)$ :

$$Q_n(z) = \frac{B_n (n-1)!}{\rho(z)} \left\{ - \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^n} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\frac{d}{ds} [\sigma^n(s) \rho(s)]}{(s-z)^n} ds \right\} = \dots$$

$$\dots = \frac{B_n}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)]}{s-z} ds.$$

Мы воспользовались тем, что подстановки равны нулю в силу условия (5.17), так как  $[\sigma^n(z) \rho(z)]^{(n-m)} = \frac{1}{A_{mn} B_n} \sigma^m(z) \rho(z) y_n^{(m)}(z)$ . С помощью формулы Родрига для полиномов  $y_n(z)$  полученное равенство можно записать следующим образом:

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_a^b \frac{y_n(s) \rho(s)}{s-z} ds. \quad (4)$$

Интегральное представление (4) иногда удобно переписать в виде

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \left[ \int_a^b \frac{y_n(s) - y_n(z)}{s-z} \rho(s) ds + y_n(z) \int_a^b \frac{\rho(s) ds}{s-z} \right].$$

Первый интеграл является полиномом второго рода  $r_n(z)$  (см. п. 3

§ 6), второй интеграл может быть выражен через функцию  $Q_0(z)$ . В результате получим

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} r_n(z) + \frac{y_n(z)}{y_0(z)} Q_0(z). \quad (5)$$

Таким образом, все особенности второго решения  $Q_n(z)$  определяются поведением функций  $Q_0(z)$  и  $1/\rho(z)$ .

**2. Асимптотическое представление.** С помощью (4) можно получить асимптотическое представление  $Q_n(z)$  при больших  $|z|$ . Для этого воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-s/z} = -\frac{1}{z} \left[ \sum_{k=0}^p \left(\frac{s}{z}\right)^k + \frac{(s/z)^{p+1}}{1-s/z} \right] = \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^p \left(\frac{s}{z}\right)^k + \frac{s^{p+1}}{(s-z)z^{p+1}}. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство с весом  $y_n(s)\rho(s)$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получим

$$\rho(z) Q_n(z) = -\sum_{k=0}^p \frac{1}{z^{k+1}} \int_a^b s^k y_n(s) \rho(s) ds + \frac{r_p(z)}{z^{p+1}}, \quad (6)$$

где

$$r_p(z) = \int_a^b \frac{s^{p+1} y_n(s) \rho(s)}{s-z} ds.$$

При интегрировании мы воспользовались свойством ортогональности (6.5).

Если  $z \rightarrow \infty$  и при этом кратчайшее расстояние от точки  $z$  до интервала  $(a, b)$  ограничено снизу, то величина  $|r_p(z)|$  будет ограничена, и равенство (6) дает нам асимптотическое представление функции  $Q_n(z)$ . В частности, при  $p=n$  из (6) имеем

$$Q_n(z) = -\frac{d_n^2}{a_n \rho(z) z^{n+1}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение:  $f_1(z) = O[f_2(z)]$  при  $z \rightarrow z_0$ , если в некоторой окрестности точки  $z = z_0$  функции  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  удовлетворяют неравенству

$$|f_1(z)| \leq C |f_2(z)|,$$

где  $C$  — постоянная.

Из асимптотического представления (7) видно, что функции второго рода  $Q_n(z)$  и классические ортогональные полиномы  $y_n(z)$  имеют различное асимптотическое поведение и поэтому являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения для классических ортогональных полиномов (за исключением случая  $n=0$ ,  $\alpha + \beta + 1 = 0$  для полиномов Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ ).

**3. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования.** Так как интегральное представление (3) для  $Q_n(z)$  отличается от интегрального представления для  $y_n(z)$  лишь постоянным множителем  $1/(2\pi i)$  и выбором контура, то функции  $Q_n(z)$  и  $y_n(z)$  будут удовлетворять одним и тем же рекуррентным соотношениям и формулам дифференцирования (см. §§ 5, 6):

$$zQ_n(z) = \alpha_n Q_{n+1}(z) + \beta_n Q_n(z) + \gamma_n Q_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (8)$$

$$\sigma(z) Q_n'(z) = \frac{\lambda_n}{n\tau_n'} \left[ \tau_n(z) Q_n(z) - \frac{B_n}{B_{n+1}} Q_{n+1}(z) \right]. \quad (9)$$

Для производной функции второго рода с помощью формулы (4.7) можно получить интегральное представление:

$$Q_n'(z) = \frac{\kappa_n B_n n!}{\sigma(z) \rho(z)} \int_a^b \frac{\sigma^n(s) \rho(s)}{(s-z)^n} ds,$$

где  $\kappa_n = \tau' + \frac{n-1}{2} \sigma'$ . При  $n=0$  это представление приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции  $Q_0(z)$ :

$$\sigma(z) \rho(z) Q_0'(z) = C, \quad (10)$$

где

$$C = \kappa_0 B_0 \int_a^b \rho(s) ds = \frac{\kappa_0 d_0^2}{a_0}.$$

Мы воспользовались тем, что по формуле Родрига  $y_0(z) = B_0 = a_0$ .

Из уравнения (10) легко получить удобное интегральное представление для функции  $Q_0(z)$ :

$$Q_0(z) = Q_0(z_0) - C \int_z^{z_0} \frac{ds}{\sigma(s) \rho(s)}. \quad (11)$$

В качестве  $z_0$  удобно выбрать такое значение  $z$ , для которого  $Q_0(z_0) = 0$ . Из асимптотического представления (7) видно, что для функций Лагерра второго рода  $Q_0^\alpha(z)$  можно положить  $z_0 = -\infty$ , а для функций Эрмита второго рода положить  $z_0 = \pm i\infty$ . Для функций Якоби  $Q_0^{(\alpha, \beta)}(z)$  можно взять  $z_0 = \infty$  при  $\alpha + \beta > -1$ .

Из (11) вытекает, что при  $z \rightarrow x$ , где  $x \in (a, b)$ , существуют пределы  $Q_0(x \pm i0)$ , и, следовательно, в силу (5) существуют предельные значения  $Q_n(x \pm i0)$ . Так как, согласно (4),  $\rho(z)Q_n(z) = \rho(\bar{z})Q_n(\bar{z})$  (черта — знак комплексного сопряжения), то при  $z = x$  в качестве второго решения уравнения для классических ортогональных полиномов удобно выбрать не  $Q_n(x \pm i0)$ , а вещественную комбинацию этих функций

$$\rho(x) Q_n(x) = 1/2 [\rho(x+i0) Q_n(x+i0) + \rho(x-i0) Q_n(x-i0)]$$

(напомним, что  $\rho(x+i0) = \rho(x)$ ).

Можно показать, что при таком определении функции  $Q_n(x)$  будут удовлетворять тем же соотношениям, которым удовлетворяют полиномы  $y_n(x)$  при  $x \in (a, b)$ . Будет оставаться справедливым и интегральное представление (4), если понимать интеграл в смысле главного значения, так как интеграл в (4) является интегралом типа Коши (см., например, [9]).

4. Некоторые специальные функции, родственные функции второго рода  $Q_0(z)$ : неполные бета- и гамма-функции, интегральная показательная функция, интеграл вероятности, интегральные синус и косинус. Из формулы (11) вытекает, что функция  $Q_0(z)$  для полиномов Якоби сводится к *неполной бета-функции*  $B_z(p, q)$  заменой  $t = 2/(1+s)$ , для полиномов Лагерра — к *неполной гамма-функции*  $\Gamma(a, z)$  заменой  $t = -s$ , для полиномов Эрмита — к *интегралу вероятности*  $\Phi(z)$  заменой  $t = \pm is$ . Функции  $B_z(p, q)$ ,  $\Gamma(a, z)$ ,  $\Phi(z)$  определяются следующим образом:

$$B_z(p, q) = \int_0^z t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt,$$

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Для однозначности функции  $\Gamma(a, z)$  следует сделать разрез от точки  $z=0$  до  $z=-\infty$  вдоль вещественной оси. В соответствии с этим разрезом в формуле для  $\Gamma(a, z)$  при вычислении  $t^{a-1}$  следует считать  $|\arg t| < \pi$ . Аналогично, в формуле для  $B_z(p, q)$  следует считать  $0 < \arg z < 2\pi$ ,  $0 < \arg t < 2\pi$ ,  $|\arg(1-t)| < \pi$ .

В виде примера рассмотрим интегральное представление (11) для функций Лагерра и Эрмита второго рода.

1) Для функции Лагерра второго рода, полагая в (11)  $z_0 = -\infty$ , получим \*)

$$Q_0(z) \equiv Q_0^\alpha(z) = \Gamma(\alpha + 1) \int_z^{-\infty} \frac{ds}{\sigma(s) \rho(s)} = \Gamma(\alpha + 1) \int_z^{-\infty} \frac{e^s}{s^{\alpha+1}} ds =$$

$$= \Gamma(\alpha + 1) e^{-i\pi\alpha} \Gamma(-\alpha, -z). \quad (12)$$

При целых значениях  $\alpha = m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) функцию  $Q_0^\alpha(z)$  можно выразить через функции

$$E_m(z) = z^{m-1} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s^m} ds = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^m} dt, \quad (13)$$

которые находят широкое применение в физике.

\*) Для однозначности функций  $Q_n(z)$  нами был сделан разрез от точки  $z=0$  до  $z=+\infty$  вдоль вещественной оси. В соответствии с этим разрезом, в формуле (12) при вычислении  $s^{\alpha+1}$  следует считать  $0 < \arg s < 2\pi$ .

Функции  $E_m(z)$  называют обычно *интегральными экспонентами*. Полагая в (12)  $\alpha = m$ , при  $z > 0$  получим

$$Q_0^m(-z) = \frac{(-1)^m m!}{z^m} E_{m+1}(z). \quad (14)$$

С помощью асимптотического представления (7) для  $Q_0(z)$  из соотношения (14) легко найти асимптотическое представление для функции  $E_m(z)$ :

$$E_m(z) = \frac{e^{-z}}{z} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (15)$$

Дифференцируя (13), получаем формулы дифференцирования

$$E'_m(z) = \frac{m-1}{z} E_m(z) - \frac{e^{-z}}{z} = -E_{m-1}(z),$$

из которых вытекает следующее рекуррентное соотношение:

$$E_m(z) = \frac{1}{m-1} [e^{-z} - zE_{m-1}(z)]. \quad (16)$$

Исследуем теперь поведение функции  $E_m(z)$  при  $z \rightarrow 0$ . Для этого в силу (16) достаточно исследовать поведение функции  $E_1(z)$ . При  $z \rightarrow 0$  функция  $E_1(z)$  имеет особенность. Для выделения ее предела следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \int_z^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds = \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds + \int_z^1 \frac{e^{-s}-1}{s} ds + \int_z^1 \frac{ds}{s} = \\ &= C - \ln z - \int_0^z \frac{e^{-s}-1}{s} ds, \end{aligned}$$

где

$$C = \int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds + \int_0^1 \frac{e^{-s}-1}{s} ds.$$

Разлагая  $e^{-s}$  по степеням  $s$  и интегрируя почленно, получим разложение функции  $E_1(z)$  по степеням  $z$ :

$$E_1(z) = C - \ln z + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{k} \frac{z^h}{h!}. \quad (17)$$

Для вычисления постоянной  $C$  воспользуемся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} C &= e^{-s} \ln s \Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-s} \ln s ds + (e^{-s}-1) \ln s \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-s} \ln s ds = \\ &= \int_0^\infty e^{-s} \ln s ds = \Gamma'(1) = -\gamma, \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера (см., Дополнение А).

Наряду с  $E_1(z)$  на практике часто употребляются родственная ей *интегральная показательная функция*  $Ei(z)$ , связанная соотношением

$$E_1(z) = -Ei(-z),$$

а также функции

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin s}{s} ds, \quad Ci(s) = \int_{\infty}^z \frac{\cos s}{s} ds,$$

которые называют *интегральным синусом* и *интегральным косинусом*. При  $z > 0$ , используя лемму Жордана [9], имеем

$$\begin{aligned} E_1(iz) &= \int_{iz}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \int_{iz}^{+i\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \int_z^{\infty} \frac{e^{-it}}{t} dt = \\ &= \int_z^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt - i \int_z^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = - \left\{ Ci(z) + i \left[ \frac{\pi}{2} - Si(z) \right] \right\}, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, при  $z > 0$

$$\begin{aligned} Ci(z) &= -\frac{1}{2} [E_1(iz) + E_1(-iz)], \\ Si(z) &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i} [E_1(iz) - E_1(-iz)]. \end{aligned} \tag{18}$$

По принципу аналитического продолжения эти соотношения остаются справедливыми в более широкой области изменения  $z$ .

Из формул (15), (17), (18) легко получить *асимптотические представления и разложения по степеням  $z$*  для  $Si(z)$ ,  $Ci(z)$ . Имеем, например,

$$\begin{aligned} Si(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}, \\ Ci(z) &= \gamma + \ln z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{2k(2k)!}. \end{aligned}$$

Так как степенные ряды для  $Si(z)$  и  $Ci(z)$  сходятся во всей комплексной плоскости, то функция  $Si(z)$  — аналитическая во всей комплексной плоскости, а  $Ci(z)$  — аналитическая в плоскости с разрезом вдоль полуоси  $(-\infty, 0]$ .

2) Для функции Эрмита второго рода, полагая в (11)  $z_0 = \pm i\infty$  (знак совпадает со знаком  $\text{Im } z$ ), получим

$$Q_0(z) = 2\sqrt{\pi} \int_{\pm i}^{\pm i\infty} e^{s^2} ds.$$

При  $z > 0$  имеем

$$Q_0(iz) = 2\sqrt{\pi} \int_{iz}^{i\infty} e^{s^2} ds = 2\sqrt{\pi} i \int_z^{\infty} e^{-s^2} ds = \pi i [1 - \Phi(z)],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds. \quad (19)$$

Функцию  $\Phi(z)$  называют *интегралом вероятности*.

С помощью асимптотического представления (7) для  $Q_0(z)$  легко найти *асимптотическое представление* для интеграла вероятности:

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

Разложение функции  $\Phi(z)$  по степеням  $z$  можно получить, разлагая в (19)  $e^{-s^2}$  в ряд и интегрируя почленно:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k! (2k+1)}.$$

С интегралом вероятности тесно связаны *интегралы Френеля*

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^2}{2} dt.$$

Действительно, при  $z > 0$  имеем

$$C(z) - iS(z) = \int_0^z e^{-i\frac{\pi t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2i}} \Phi\left(\sqrt{i\frac{\pi}{2}} z\right).$$

Полученная связь позволяет получить асимптотическое поведение и разложение в ряды интегралов Френеля.

Графики функций  $E_1(x)$ ,  $\text{Si}(x)$ ,  $\text{Ci}(x)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $S(x)$ ,  $C(x)$  приведены на рис. 3—5.



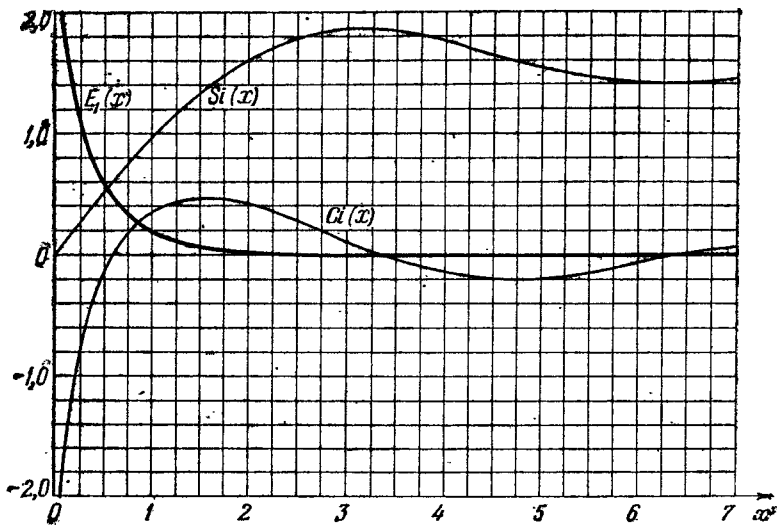


Рис. 3.

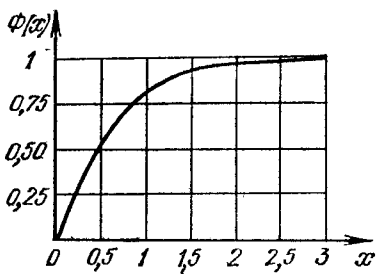


Рис. 4.

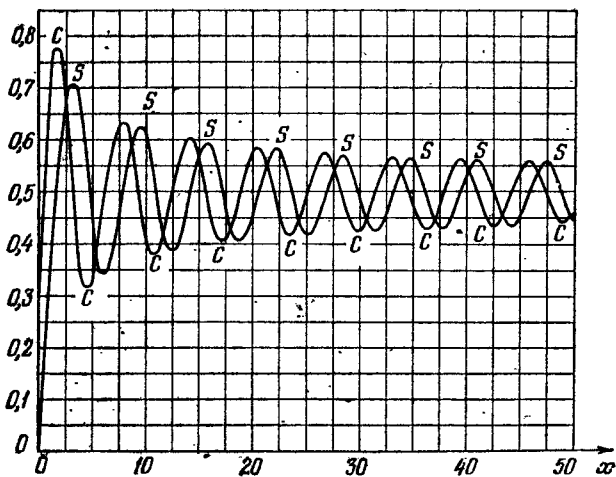


Рис. 5.