§ 12. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной

1. Разностное уравнение гипергеометрического типа. Развитая ранее теория полиномиальных решений дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0 \qquad (1)$$

($\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$ — полиномы не выше второй и первой степени*), λ — постоянная) допускает естественное обобщение на случай, когда дифференциальное уравнение заменяется разностным. Рассмотрим наиболее простой случай, когда дифференциальное уравнение (1) заменяется разностным уравнением

$$\tilde{\sigma}(x)\frac{1}{h}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} + \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \lambda y(x) = 0, \qquad (2)$$

которое аппроксимирует уравнение (1) на сетке с постоянным шагом $\Delta x = h$ со вторым порядком точности относительно h **).

Линейной заменой независимой переменной x на hx, сохраняющей тип уравнения, всегда можно добиться того, чтобы в уравнении (2) шаг сетки был равен единице ($\Delta x = h = 1$). В этом случае

$$\tilde{\sigma}(x)\left[y(x+1) - 2y(x) + y(x-1)\right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\{[y(x+1) - y(x)] + [y(x) - y(x-1)]\} + \lambda y(x) = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{\sigma}(x)\Delta\nabla y(x) + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}(\Delta + \nabla)y(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad (2a)$$

где $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Так как $\nabla f(x) = \Delta f(x) - \Delta\nabla f(x)$, то (2a) эквивалентно уравнению

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad (3)$$

где $\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) - \tilde{\tau}(x)/2$, $\tilde{\tau}(x) = \tau(x)$. Очевидно, что $\sigma(x)$ — полином не выше второй степени.

---

*) Для удобства дальнейшего изложения мы обозначили коэффициенты уравнения (1) через $\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$ вместо $\sigma(x)$ и $\tau(x)$, как это было принято в гл. I.

**) Говорят, что разностный оператор L_h *аппроксимирует* в точке x дифференциальный оператор L с порядком точности m относительно шага h, если

$$L_h y(x) - L y(x) = O(h^m), \quad h \to 0.$$

Прежде чем переходить к изучению решений уравнения (3), рассмотрим ряд свойств операторов Δ и ∇. Имеем

$$\Delta f(x)=\nabla f(x+1), \tag{4}$$

$$\Delta\nabla f(x)=\nabla\Delta f(x)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1), \tag{5}$$

$$\Delta[f(x)g(x)]=f(x)\Delta g(x)+g(x+1)\Delta f(x). \tag{6}$$

Из (6) вытекает следующая формула суммирования по частям:

$$\sum_i f(x_i)\Delta g(x_i)=f(x_i)g(x_i)\Big|_a^b-\sum_i g(x_{i+1})\Delta f(x_i). \tag{7}$$

Здесь $x_{i+1}=x_i+1$, суммирование производится по таким значениям i, для которых $a\leqslant x_i\leqslant b-1$. Заметим, что для произвольного полинома $q_m(x)$ степени m выражения $\Delta q_m(x)$ и $\nabla q_m(x)$ будут полиномами степени $m-1$, причем $\Delta^m q_m(x)=\nabla^m q_m(x)=q_m^{(m)}(x)$.

Установим ряд свойств решений уравнения (3), аналогичных свойствам решений уравнения (1). Докажем, что *функция* $v_1(x)=\Delta y(x)$ *удовлетворяет разностному уравнению вида* (3).

Для доказательства применим оператор Δ к обеим частям уравнения (3):

$$\Delta[\sigma(x)\nabla v_1(x)]+\Delta[\tau(x)v_1(x)]+\lambda v_1(x)=0.$$

Используя (6), (4), это уравнение можно привести к виду

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_1(x)+\tau_1(x)\Delta v_1(x)+\mu_1 v_1(x)=0, \tag{8}$$

где $\tau_1(x)=\tau(x+1)+\Delta\sigma(x)$, $\mu_1=\lambda+\Delta\tau(x)$. Так как $\tau_1(x)$ — полином не выше первой степени, а μ_1 не зависит от x, то (8) будет уравнением того же вида, что и (3).

Легко проверить и обратное утверждение: *любое решение уравнения* (8) *при* $\lambda\neq 0$ *можно представить в виде* $v_1(x)=\Delta y(x)$, *где* $y(x)$ *— некоторое решение уравнения* (3), *которое выражается через* $v_1(x)$ *следующим образом*:

$$y(x)=-\frac{1}{\lambda}[\sigma(x)\nabla v_1+\tau(x)v_1].$$

Подобным же образом *для функции* $v_n(x)=\Delta^n y(x)$ *можно получить разностное уравнение гипергеометрического типа*

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_n(x)+\tau_n(x)\Delta v_n(x)+\mu_n v_n(x)=0, \tag{9}$$

где

$$\tau_n(x)=\tau_{n-1}(x+1)+\Delta\sigma(x),\quad \tau_0(x)=\tau(x), \tag{10}$$

$$\mu_n=\mu_{n-1}+\Delta\tau_{n-1}(x),\quad \mu_0=\lambda. \tag{11}$$

Справедливо и обратное утверждение: *любое решение уравнения* (9) *при* $\mu_k\neq 0$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ *можно представить в виде* $v_n(x)=\Delta^n y(x)$, *где* $y(x)$ *— некоторое решение уравнения* (3).

Если (10) переписать в виде

$$\tau_n(x)+\sigma(x)=\tau_{n-1}(x+1)+\sigma(x+1), \tag{10a}$$

то легко получить явное выражение для $\tau_n(x)$:

$$\tau_n(x) = \tau(x+n) + \sigma(x+n) - \sigma(x).$$

Чтобы найти явное выражение для μ_n, достаточно заметить, что величины $\Delta\tau_n(x)$ и $\Delta^2\sigma(x)$ не зависят от x. Поэтому

$$\Delta\tau_n = \Delta\tau_{n-1} + \Delta^2\sigma = \ldots = \Delta\tau + n\,\Delta^2\sigma$$

и, следовательно, $\mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau + (n-1)\Delta^2\sigma$. Отсюда

$$\mu_n = \mu_0 + \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \mu_{k-1}) = \lambda + n\,\Delta\tau + \frac{n(n-1)}{2}\,\Delta^2\sigma =$$

$$= \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \qquad (12)$$

2. Разностные аналоги полиномов гипергеометрического типа и их производных. Формула Родрига. Рассмотренное в п. 1 свойство разностных производных $\Delta^n y(x)$ позволяет построить теорию классических ортогональных полиномов дискретной переменной, следуя логической схеме, принятой в гл. I. Очевидно, уравнение (9) при $\mu_n = 0$ имеет частное решение $v_n(x) = \mathrm{const}$. Так как $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, то это означает, что при

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

может существовать частное решение уравнения $y = y_n(x)$, являющееся полиномом n-й степени, если $\mu_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Действительно, уравнение для функции $v_k(x)$

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_k + \tau_k(x)\Delta v_k + \mu_k v_k = 0$$

можно переписать в виде

$$v_k(x) = -\frac{1}{\mu_k}[\sigma(x)\nabla v_{k+1}(x) + \tau_k(x)\,v_{k+1}(x)].$$

Отсюда видно, что если $v_{k+1}(x)$ — полином, то $v_k(x)$ — также полином при $\mu_k \neq 0$.

Чтобы получить явное выражение для полинома $y_n(x)$, запишем уравнения (3), (9) в самосопряженном виде:

$$\Delta(\sigma\rho\nabla y) + \lambda\rho y = 0, \qquad (13)$$

$$\Delta(\sigma\rho_n\nabla v_n) + \mu_n\rho_n v_n = 0. \qquad (14)$$

Здесь функции $\rho(x)$ и $\rho_n(x)$ удовлетворяют разностным уравнениям

$$\Delta(\sigma\rho) = \tau\rho, \qquad (15)$$

$$\Delta(\sigma\rho_n) = \tau_n\rho_n. \qquad (16)$$

Найдем связь функций $\rho_n(x)$ и $\rho(x)$, представив уравнение (16) в виде

$$\frac{\sigma(x+1)\,\rho_n(x+1)}{\rho_n(x)} = \tau_n(x) + \sigma(x).$$

Отсюда видно, что (10а) будет эквивалентно соотношению

$$\frac{\sigma(x+1)\rho_n(x+1)}{\rho_n(x)} = \frac{\sigma(x+2)\rho_{n-1}(x+2)}{\rho_{n-1}(x+1)},$$

т. е.

$$\frac{\rho_n(x+1)}{\sigma(x+2)\rho_{n-1}(x+2)} = \frac{\rho_n(x)}{\sigma(x+1)\rho_{n-1}(x+1)} = C_n(x),$$

где $C_n(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом, равным единице. Нам достаточно найти любое решение уравнения (16), поэтому можно положить $C_n(x) = 1$. В результате получим

$$\rho_n(x) = \sigma(x+1)\rho_{n-1}(x+1).$$

Так как $\rho_0(x) = \rho(x)$, то

$$\rho_n(x) = \rho(x+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(x+k). \tag{17}$$

Используя связь функций $\rho_n(x)$ и $\rho_{n+1}(x)$, уравнение (14) можно записать в виде простого соотношения между функциями $v_n(x)$ и $v_{n+1}(x)$. Действительно,

$$\rho_n(x)v_n(x) = -\frac{1}{\mu_n}\Delta[\sigma(x)\rho_n(x)\nabla v_n(x)] =$$

$$= -\frac{1}{\mu_n}\nabla[\sigma(x+1)\rho_n(x+1)\Delta v_n(x)],$$

или

$$\rho_n(x)v_n(x) = -\frac{1}{\mu_n}\nabla[\rho_{n+1}(x)v_{n+1}(x)].$$

Отсюда при $m < n$ последовательно получаем

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}\nabla(\rho_{m+1}v_{m+1}) =$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)\nabla^2(\rho_{m+2}v_{m+2}) = \cdots = \frac{A_m}{A_n}\nabla^{n-m}(\rho_n v_n), \tag{18}$$

где

$$A_n = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\mu_k, \quad A_0 = 1. \tag{19}$$

Если $y = y_n(x)$, то $v_n(x) = \text{const}$, и мы приходим к следующему выражению для $v_{mn}(x) = \Delta^m y_n(x)$:

$$v_{mn}(x) = \frac{A_{mn}B_n}{\rho_m(x)}\nabla^{n-m}[\rho_n(x)], \tag{20}$$

где

$$A_{mn}=A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}=\frac{n!}{(n-m)!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\tau'+\frac{n+k-1}{2}\sigma''\right),$$

$$A_{0n}=1,\ m\leqslant n,$$

$$B_n=\frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}}=\frac{1}{A_{nn}}y_n^{(n)}(x). \tag{21}$$

Отсюда, в частности, при $m=0$ получаем явное выражение для полиномов $y_n(x)$:

$$y_n(x)=\frac{B_n}{\rho(x)}\nabla^n[\rho_n(x)]. \tag{22}$$

Таким образом, *полиномиальные решения уравнения* (3) *определяются формулой* (22) *однозначно с точностью до нормировочного множителя* B_n. Эти решения соответствуют значениям

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Используя (4), (17), формулу (22) можно записать также в другом виде:

$$y_n(x)=\frac{B_n}{\rho(x)}\Delta^n[\rho_n(x-n)]=\frac{B_n}{\rho(x)}\Delta^n\left[\rho(x)\prod_{k=0}^{n-1}\sigma(x-k)\right]. \tag{22a}$$

Соотношение (20) является *разностным аналогом формулы Родрига* для классических ортогональных полиномов и их производных (см. (2.10)). Из формул Родрига для полиномов $y_n(x)$ и их разностных производных $\Delta y_n(x)$ вытекает связь функций $\Delta y_n(x)$ с самими полиномами. Для этого достаточно заметить, что при $m=1$ в (20) $A_{1n}=-\lambda_n$ и согласно (17) $[\rho_1(x)]_{n-1}=\rho_n(x)$. Действительно,

$$\rho_1(x)=\sigma(x+1)\rho(x+1),$$

$$[\rho_1(x)]_{n-1}=$$

$$=\rho_1(x+n-1)\prod_{k=1}^{n-1}\sigma(x+k)=\rho(x+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(x+k)=\rho_n(x).$$

Отсюда

$$\Delta y_n(x)=-\lambda_n\frac{B_n}{\rho_1(x)}\nabla^{n-1}[\rho_n(x)]=$$

$$=-\lambda_n\frac{B_n\overline{B}_{n-1}}{\overline{B}_{n-1}\rho_1(x)}\nabla^{n-1}\{[\rho_1(x)]_{n-1}\}=-\lambda_n\frac{B_n}{\overline{B}_{n-1}}\overline{y}_{n-1}(x). \tag{23}$$

Здесь $\overline{y}_n(x)$ — полином, получающийся при замене $\rho(x)$ на $\rho_1(x)$ в выражении для $y_n(x)$, $\overline{B}_n$ — нормировочная постоянная в формуле Родрига для $\overline{y}_n(x)$.

С помощью (20) при $m=n-1$ можно вычислить коэффициенты a_n, b_n при старших степенях x в разложении

$$y_n(x)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+\dots$$

Для этого предварительно найдем $n-1$-ю разность $\Delta^{n-1}(x^n)$, являющуюся полиномом первой степени. Имеем

$$\Delta^{n-1}(x^n)=\alpha_n(x+\beta_n),$$

где α_n, β_n — постоянные. Для определения коэффициентов α_n, β_n заметим, что

$$\Delta^n(x^n)=\Delta[\alpha_n(x+\beta_n)]=\alpha_n.$$

Отсюда

$$\alpha_{n+1}(x+\beta_{n+1})=\Delta^n\left(x^{n+1}\right)=\Delta^{n-1}\left(\Delta x^{n+1}\right)=$$

$$=\Delta^{n-1}\left[(x+1)^{n+1}-x^{n+1}\right]=\Delta^{n-1}\left[(n+1)x^n+\frac{(n+1)n}{2}x^{n-1}+\dots\right]=$$

$$=(n+1)\alpha_n(x+\beta_n)+\frac{(n+1)n}{2}\alpha_{n-1}.$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях x в левой и правой частях этого равенства, получим

$$\alpha_{n+1}=(n+1)\alpha_n,\quad \alpha_{n+1}\beta_{n+1}=(n+1)\alpha_n\beta_n+\frac{(n+1)n}{2}\alpha_{n-1}.$$

Так как $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, то из первого равенства находим $\alpha_n=n!$, откуда $\beta_{n+1}=\beta_n+1/2$, т. е. $\beta_n=(n-1)/2$. Таким образом,

$$\Delta^{n-1}\left(x^n\right)=n!\left(x+\frac{n-1}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\Delta^{n-1}y_n(x)=\Delta^{n-1}\left(a_nx^n+b_nx^{n-1}+\dots\right)=$$

$$=a_n\alpha_n(x+\beta_n)+b_n\alpha_{n-1}=n!\,a_n\left(x+\frac{n-1}{2}\right)+(n-1)!\,b_n.$$

С другой стороны,

$$\nabla\rho_n(x)=\Delta\rho_n(x-1)=\Delta[\sigma(x)\rho_{n-1}(x)]=\tau_{n-1}(x)\rho_{n-1}(x).$$

Поэтому, полагая в (20) $m=n-1$, получим

$$A_{n-1,n}B_n\tau_{n-1}(x)=n!\,a_n\left(x+\frac{n-1}{2}\right)+(n-1)!\,b_n,$$

откуда

$$a_n=\frac{A_{n-1,n}B_n}{n!}\tau'_{n-1}=B_n\prod_{k=0}^{n-1}\left(\tau'+\frac{n+k-1}{2}\sigma''\right),\quad a_0=B_0,\tag{24}$$

$$\frac{b_n}{a_n}=n\frac{\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}}-\frac{n(n-1)}{2}=n\frac{\tilde{\tau}(0)+(n-1)\tilde{\sigma}'(0)}{\tilde{\tau}'+(n-1)\tilde{\sigma}''}.\tag{25}$$

3. **Свойство ортогональности.** Выведем свойство ортогональности полиномиальных решений разностного уравнения (3). С этой

целью запишем уравнения для полиномов $y_n(x)$ и $y_m(x)$ в самосопряженном виде:

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_n(x)] + \lambda_n\rho(x)y_n(x) = 0,$$
$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)\nabla y_m(x)] + \lambda_m\rho(x)y_m(x) = 0.$$

Умножим первое уравнение на y_m, второе на y_n и вычтем из первого уравнения второе. В результате получим

$$(\lambda_m-\lambda_n)\rho(x)y_m(x)y_n(x) = \Delta\{\sigma(x)\rho(x)[y_m(x)\nabla y_n(x) - y_n(x)\nabla y_m(x)]\}.$$

Положим $x = x_i$, $x_{i+1} = x_i + 1$ и просуммируем по тем значениям индекса i, для которых $a \leqslant x_i \leqslant b-1$. Тогда придем к равенству

$$(\lambda_m-\lambda_n)\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i)\,y_n(x_i)\,\rho(x_i) = \\ = \sigma(x)\rho(x)[y_m(x)\nabla y_n(x) - y_n(x)\nabla y_m(x)]\Big|_a^b.$$

Здесь $y_m\nabla y_n - y_n\nabla y_m$ — полином относительно переменной x. Поэтому *при выполнении граничных условий*

$$\sigma(x)\rho(x)x^k\big|_{x=a,b} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{26}$$

полиномиальные решения уравнения (3) *будут ортогональны на отрезке* $[a, b-1]$ *с весом* $\rho(x)$:

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i)\,y_n(x_i)\,\rho(x_i) = \delta_{mn}d_n^2. \tag{27}$$

Полиномы $y_n(x)$, для которых интервал (a, b) находится на вещественной оси, а функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению (15) и граничному условию (26), будем называть *классическими ортогональными полиномами дискретной переменной*. Обычно их рассматривают при дополнительном условии $\rho(x_i) > 0$, если $a \leqslant x_i \leqslant b-1$.

Рассмотрим теперь свойство ортогональности разностных производных полиномов $y_n(x)$. Полиномы $\Delta y_n(x)$ удовлетворяют уравнению, которое получается из уравнения для $y_n(x)$ заменой $\rho(x)$ на $\rho_1(x) = \sigma(x+1)\rho(x+1) = [\tau(x) + \sigma(x)]\rho(x)$ и заменой λ на $\mu_1 = \lambda + \tau'$. Функция $\rho_1(x)$, очевидно, удовлетворяет условию, аналогичному (26):

$$\sigma(x)\rho_1(x)x^k\big|_{x=a,b-1} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Поэтому для полиномов $\Delta y_n(x)$ справедливо свойство ортогональности

$$\sum_{x_i=a}^{b-2} \Delta y_m(x_i)\,\Delta y_n(x_i)\,\rho_1(x_i) = \delta_{mn}d_{1n}^2.$$

Аналогично, легко показать, что для полиномов $\Delta^k y_n(x)$ имеет место соотношение

$$\sum_{x_i=a}^{b-k-1} \Delta^k y_m(x_i) \Delta^k y_n(x_i) \rho_k(x_i) = \delta_{mn} d_{kn}^2. \tag{28}$$

Если выбрать $\rho(a) > 0$, то при выполнении условий

$$\begin{gathered} \sigma(x_i) > 0, \quad a+1 \leqslant x_i \leqslant b-1, \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) > 0, \quad a \leqslant x_i \leqslant b-2, \end{gathered} \tag{29}$$

из уравнения (15), записанного в виде

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)},$$

и явного вида функций $\rho_k(x)$ будет следовать, что

$$\rho_k(x_i) > 0, \quad a \leqslant x \leqslant b-k-1, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Рассмотрим теперь некоторые соображения о выборе величин a, b, для которых удовлетворяются граничные условия (26) и условия положительности веса $\rho(x_i)$ на отрезке ортогональности $[a, b-1]$. Если a — конечное число, то по условию $\rho(a) > 0$, т. е. a — корень полинома $\sigma(x)$. Так как линейная замена независимой переменной x на $x+a$ не меняет типа уравнения, то при $\sigma(x) \neq$ $\neq$ const всегда можно добиться того, чтобы $\sigma(0) = 0$, т. е. можно считать, что $a = 0$. Если b — конечное число, то в силу (15)

$$\sigma(b)\rho(b) = [\sigma(b-1) + \tau(b-1)]\rho(b-1).$$

Так как $\rho(b-1) > 0$, то

$$\sigma(b-1) + \tau(b-1) = 0. \tag{30}$$

При $b = +\infty$ граничные условия (26) будут выполнены, если

$$\lim_{x\to+\infty} x^k \rho(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Аналогичное условие имеет место при $a = -\infty$.

Для вычисления квадрата нормы d_n^2 установим предварительно связь квадратов норм d_{kn}^2 и $d_{k+1,n}^2$, где

$$d_{kn}^2 = \sum_{x_i=a}^{b-k-1} v_{kn}^2(x_i) \rho_k(x_i), \quad d_{0n}^2 = d_n^2, \quad v_{kn}(x) = \Delta^k y_n(x).$$

Для этого разностное уравнение

$$\Delta[\sigma(x)\rho_k(x)\nabla v_{kn}(x)] + \mu_{kn}\rho_k(x)v_{kn}(x) = 0,$$

где $\mu_{kn} = \mu_k(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = \lambda_n - \lambda_k$, умножим на $v_{kn}(x)$ и просуммируем по тем значениям $x = x_i$, для которых $a \leqslant x_i \leqslant b-k-1$:

$$\sum_i v_{kn}(x_i) \Delta[\sigma(x_i)\rho_k(x_i)\nabla v_{kn}(x_i)] + \mu_{kn} d_{kn}^2 = 0.$$

Воспользовавшись формулой суммирования по частям (7) и равенствами

$$\Delta v_{kn}(x) = v_{k+1,n}(x), \quad \sigma(x+1)\rho_k(x+1) = \rho_{k+1}(x),$$

получим

$$\sum_{x_i} v_{kn}(x_i)\,\Delta\,[\sigma(x_i)\,\rho_k(x_i)\,\nabla v_{kn}(x_i)] =$$

$$= \sigma(x)\,\rho_k(x)\,\nabla v_{kn}(x)\,v_{kn}(x)\Big|_a^{b-k} - d^2_{k+1,n}.$$

Так как подстановка в силу (26) равна нулю, то

$$d^2_{kn} = \frac{1}{\mu_{kn}}\,d^2_{k+1,n}.$$

Отсюда последовательно находим

$$d^2_n \equiv d^2_{0n} = \frac{1}{\mu_{0n}}\,d^2_{1n} = \frac{1}{\mu_{0n}}\,\frac{1}{\mu_{1n}}\,d^2_{2n} = \dots$$

$$\dots = \frac{d^2_{nn}}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\mu_{kn}} = \frac{v^2_{nn}(x)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\mu_{kn}}\,S_n = (-1)^n A_{nn} B^2_n S_n, \tag{31}$$

где

$$S_n = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \rho_n(x_i). \tag{32}$$

При $n = b - a - 1$ (в случае, когда $b - a = N$ — конечное число) сумма S_n содержит лишь одно слагаемое и поэтому легко вычисляется:

$$S_{N-1} = \rho_{N-1}(a). \tag{33}$$

Чтобы вычислить S_n при $n < N - 1$, достаточно уметь вычислять отношение S_{n-1}/S_n. Для этого преобразуем (32), используя связь функций $\rho_n(x)$ и $\rho_{n-1}(x)$:

$$S_n = \sum_{x_i}\rho_n(x_i) = \sum_{x_i}\sigma(x_i+1)\,\rho_{n-1}(x_i+1) = \sum_{x_i}\sigma(x_i)\,\rho_{n-1}(x_i).$$

Разложим полином $\sigma(x)$ по степеням полинома первой степени $\tau_{n-1}(x)$:

$$\sigma(x) = A_n\tau^2_{n-1}(x) + B_n\tau_{n-1}(x) + C_n.$$

Тогда с помощью уравнения для $\rho_{n-1}(x)$ и суммирования по частям получим

$$S_n = \sum_{x_i}[A_n\tau_{n-1}(x_i) + B_n]\,\tau_{n-1}(x_i)\,\rho_{n-1}(x_i) + C_nS_{n-1} =$$

$$= \sum_{x_i}[A_n\tau_{n-1}(x_i) + B_n]\,\Delta\,[\sigma(x_i)\,\rho_{n-1}(x_i)] + C_nS_{n-1} =$$

$$= -\sum_{x_i}\sigma(x_i+1)\,\rho_{n-1}(x_i+1)\,\Delta\,[A_n\tau_{n-1}(x_i) + B_n] + C_nS_{n-1} =$$

$$= -A_n\tau'_{n-1}S_n + C_nS_{n-1}.$$

Отсюда

$$\frac{S_{n-1}}{S_n}=\frac{1+A_n\tau'_{n-1}}{C_n}=\frac{1+\sigma''/(2\tau'_{n-1})}{\sigma\left(x_n^*\right)},\tag{34}$$

где x_n^* — корень уравнения $\tau_{n-1}(x)=0$. Мы воспользовались тем, что $\sigma\left(x_n^*\right)=C_n$, $\sigma''=2A_n\left(\tau'_{n+1}\right)^2$. С помощью формул (31)—(34) окончательно получим

$$d_n^2=(-1)^n A_{nn}B_n^2\rho_{N-1}(a)\prod_{k=n+1}^{N-1}\left[\frac{1+\sigma''/(2\tau'_{k-1})}{\sigma\left(x_k^*\right)}\right],\tag{31a}$$

где $N=b-a$, $\tau'_{k-1}=\tau'+(k-1)\sigma''$, x_k^* — корень уравнения $\tau_{k-1}(x)=0$, т. е. уравнения

$$\tau(x)+(k-1)\sigma'(x)+(k-1)\tau'+(k-1)^2\sigma''/2=0.$$

4. Полиномы Хана, Чебышева, Мейкснера, Кравчука и Шарлье. Найдем явные выражения для веса $\rho(x)$, с которым ортогональны классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Для этого разностное уравнение (15) перепишем в виде

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)}=\frac{\sigma(x)+\tau(x)}{\sigma(x+1)}.\tag{35}$$

Нетрудно проверить, что решения уравнения $\rho(x+1)/\rho(x)=f(x)$, правую часть которого можно представить в виде произведения или частного двух функций, обладают следующим простым свойством.

Если функции $\rho_1(x)$ *и* $\rho_2(x)$ *являются решениями уравнений*

$$\rho_1(x+1)/\rho_1(x)=f_1(x),\quad \rho_2(x+1)/\rho_2(x)=f_2(x),$$

то решением уравнения

$$\rho(x+1)/\rho(x)=f(x)$$

при $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ *будет функция* $\rho(x)=\rho_1(x)\rho_2(x)$, *а при* $f(x)=f_1(x)/f_2(x)$ — *функция* $\rho(x)=\rho_1(x)/\rho_2(x)$.

Так как правая часть уравнения (35) является рациональной функцией, то его решение можно выразить через решения следующих разностных уравнений:

$$\rho(x+1)/\rho(x)=\gamma+x,\tag{36}$$

$$\rho(x+1)/\rho(x)=\gamma-x,\tag{37}$$

$$\rho(x+1)/\rho(x)=\gamma,\tag{38}$$

где γ — постоянная. Так как

$$\gamma+x=\Gamma(\gamma+x+1)/\Gamma(\gamma+x),$$

то частное решение уравнения (36) имеет вид $\rho(x)=\Gamma(\gamma+x)$. Точно так же, используя равенство

$$\gamma-x=\frac{\Gamma(\gamma-x+1)}{\Gamma(\gamma-x)}=\frac{1}{\Gamma[(\gamma+1)-(x+1)]}\Bigg/\frac{1}{\Gamma(\gamma+1-x)},$$

находим частное решение уравнения (37) $\rho(x)=1/\Gamma(\gamma+1-x)$.

Легко убедиться, что частным решением уравнения (38) является функция $\rho(x)=\gamma^x$.

Найдем решения уравнения (35), соответствующие различным степеням полинома $\sigma(x)$.

1) Пусть $\sigma(x)=x(\gamma_1-x)$, $\sigma(x)+\tau(x)=(x+\gamma_2)(\gamma_3-x)$. Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — постоянные. Условия (29) и (30) при $a=0$, $b=N$ примут вид

$$\begin{gathered}\sigma(x_i)>0, \quad 1\leqslant x_i\leqslant N-1,\\ \sigma(x_i)+\tau(x_i)>0, \quad 0\leqslant x_i\leqslant N-2,\\ \sigma(N-1)+\tau(N-1)=0.\end{gathered} \tag{39}$$

Они будут выполнены, если положить $\gamma_1=N+\alpha$, $\gamma_2=\beta+1$ $(\alpha>-1,\ \beta>-1)$, $\gamma_3=N-1$. Уравнение (35) в этом случае имеет вид

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)}=\frac{(x+\beta+1)(N-1-x)}{(x+1)(N+\alpha-1-x)}. \tag{40}$$

Решением этого уравнения будет функция

$$\rho(x)=\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\,\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(N-x)}, \quad \alpha>-1, \quad \beta>-1. \tag{41}$$

Приведем некоторые соображения относительно выбора постоянных γ_1, γ_2 в виде $\gamma_1=N+\alpha$, $\gamma_2=\beta+1$. Естественно ожидать, что полиномиальные решения $y_n(x)$ при линейной замене $x=N(1+s)/2$, переводящей интервал $(0, N)$ в интервал $(-1, 1)$, будут переходить при $N\to\infty$ (когда $\Delta s = h = 2/N\to 0$) в полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$. При этом вес $\rho(x)$ будет переходить с точностью до постоянного множителя в вес для полиномов Якоби $(1-s)^\alpha(1+s)^\beta$. Решением уравнения (35) при

$$\sigma(x)=x(\gamma_1-x), \quad \sigma(x)+\tau(x)=(x+\gamma_2)(N-1-x)$$

будет функция

$$\rho(x)=\frac{\Gamma(\gamma_1-x)\,\Gamma(x+\gamma_2)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(N-x)}=\frac{\Gamma[N(1-s)/2+\gamma_1-N]\,\Gamma[N(1+s)/2+\gamma_2]}{\Gamma[N(1-s)/2]\,\Gamma[N(1+s)/2+1]}.$$

Так как

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\,z^a}=1, \tag{42}$$

то при $N\to\infty$

$$\rho(x)\approx\left[\frac{N}{2}(1-s)\right]^{\gamma_1-N}\left[\frac{N}{2}(1+s)\right]^{\gamma_2-1}.$$

Поэтому естественно положить $\gamma_1-N=\alpha$, $\gamma_2-1=\beta$.

Полиномы $y_n(x)$, получаемые по формуле Родрига (22) при $B_n=(-1)^n/n!$, когда вес $\rho(x)$ определяется формулой (41), называются *полиномами Хана* и обозначаются $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$. В дальнейшем наряду с обозначением $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ мы будем использовать также обозначение $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, если N не меняется.

Важным частным случаем полиномов Хана являются *полиномы Чебышева дискретной переменной*

$$t_n(x) = h_n^{(0,0)}(x, N),$$

для которых $\rho(x) = 1$.

Полиномы Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ и их разностные производные ортогональны на отрезке $[0, N-1]$ при $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Интересно отметить, что в последнее время была обнаружена простая связь полиномов Хана с широко используемыми в квантовой механике и теории представлений группы вращений коэффициентами Клебша — Гордана, которая стимулировала дальнейшее изучение свойств этих коэффициентов. Эта связь будет рассмотрена в § 26 п. 4.

2) Пусть $\sigma(x) = x(x+\gamma_1)$, $\sigma(x) + \tau(x) = (\gamma_2 - x)(\gamma_3 - x)$. Условия (39) будут выполнены, если $\gamma_1 > -1$, $\gamma_2 > N-2$, $\gamma_3 = N-1$. Решением уравнения (35) в этом случае будет функция

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+\mu+1)\Gamma(N+\nu-x)\Gamma(N-x)},$$
$$\mu > -1, \quad \nu > -1. \tag{43}$$

Здесь $\mu = \gamma_1$, $\nu = \gamma_2 - N + 1$.

Полиномы $y_n(x)$, получаемые по формуле Родрига (22) при $B_n = 1/n!$, когда вес $\rho(x)$ определяется формулой (43), будем также называть *полиномами Хана* и обозначать $\tilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x, N)$.

Между полиномами $\tilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x)$ и $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ существует простая связь. Если формально положить $\mu = -N-\alpha$, $\nu = -N-\beta$, то выражения для $\sigma(x)$ и $\sigma(x)+\tau(x)$, соответствующие полиномам $\tilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x)$ и $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, будут отличаться лишь знаком. Поэтому полиномы $\tilde{h}_n^{(-N-\alpha,-N-\beta)}(x)$ и $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ будут удовлетворять одному и тому же разностному уравнению. Нетрудно убедиться, что при выбранной нормировке эти полиномы совпадают. Действительно, с помощью формулы дополнения для гамма-функции

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

можно получить, что выражения (41) и (43) для $\rho(x)$ при $\mu = -N-\alpha$, $\nu = -N-\beta$ отличаются лишь периодическим множителем

$$C(x) = \frac{\pi^2}{\sin \pi(N+\alpha-x)\sin \pi(\beta+1+x)},$$

который не влияет на явный вид полиномов, получаемых по формуле Родрига. Поэтому выражения для $\tilde{h}_n^{(-N-\alpha,-N-\beta)}(x)$ и $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ совпадут, если нормировочные постоянные B_n для этих полиномов будут отличаться множителем $(-1)^n$, так как соответствующие выражения для $\sigma(x)$ отличаются знаком.

Таким образом, *полиномы* $\widetilde{h}_n^{(-N-\alpha,-N-\beta)}(x)$ *осуществляют аналитическое продолжение полиномов* $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *по параметрам* α, β *с области* $\alpha>-1$, $\beta>-1$ *на область* $\alpha<1-N$, $\beta<1-N$.

Замечания. 1. В случае, когда $\sigma(x)$ — полином второй степени, решение уравнения (35) для $\rho(x)$ имеет степенное поведение при $x\to\pm\infty$, в чем можно убедиться, используя (42). Поэтому выбор $a=-\infty$ или $b=+\infty$ приводит к тому, что моменты весовой функции $\sum\limits_i x_i^k\rho(x_i)$ $(k=0, 1, \ldots)$ не будут существовать, начиная с некоторого значения k, т. е. в этом случае возможна лишь конечная система ортогональных полиномов $\{y_n(x)\}$, хотя число точек x_i, по которым проводится суммирование в соотношении ортогональности, бесконечно.

2. Полиномы $\widetilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x, N)$ и $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ можно выразить через рассмотренные в [1] полиномы $p_n(x, \beta, \gamma, \delta)$, для которых

$$B_n=\frac{1}{n!},\quad \sigma(x)=x\,(\delta-1+x),\qquad \rho(x)=\frac{(\beta)_x(\gamma)_x}{x!\,(\delta)_x},$$

где $(a)_x=\Gamma(a+x)/\Gamma(a)$. Так как функции $\sigma(x)$ для полиномов $\widetilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x, N)$ и $p_n(x, \beta, \gamma, \delta)$ при $\mu=\delta-1$, $\nu=\gamma-\beta$, $N=1-\gamma$ совпадают, а весовые функции $\rho(x)$ отличаются лишь постоянным множителем, то

$$\widetilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x, N)=p_n(x, 1-N-\nu, 1-N, 1+\mu).$$

С помощью ранее выведенного соотношения

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)=\widetilde{h}_n^{(-N-\alpha,-N-\beta)}(x, N)$$

также получаем

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)=p_n(x, \beta+1, 1-N, 1-N-\alpha).$$

3) Пусть $\sigma(x)=x$. Рассмотрим три возможных случая:

$$\sigma(x)+\tau(x)=\begin{cases}\mu(\gamma+x),\\ \mu(\gamma-x),\\ \mu.\end{cases}$$

Здесь μ, γ — постоянные. Уравнение (35) при этом будет иметь следующие решения:

$$\rho(x)=\begin{cases}C\dfrac{\mu^x\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(x+1)},\\ C\dfrac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(\gamma+1-x)},\\ C\dfrac{\mu^x}{\Gamma(x+1)}.\end{cases}$$

В первом случае граничные условия (26) и условия положительности веса $\rho_k(x_i)$ будут удовлетворены, если положить

$$a=0,\quad b=+\infty,\quad 0\le\mu<1,\quad \gamma>0.$$

Постоянную удобно выбрать в виде $C = 1/\Gamma(\gamma)$. В результате получим

$$\rho(x) = \frac{\mu^x (\gamma)_x}{\Gamma(x+1)}. \tag{44}$$

Соответствующие полиномы при $B_n = \mu^{-n}$ называются *полиномами Мейкснера* $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$.

Из аналогичных соображений во втором случае достаточно выбрать

$$a=0, \quad b=N+1, \quad \gamma=N, \quad \mu=p/q,$$
$$p>0, \quad q>0, \quad p+q=1, \quad C=q^N N!.$$

Для величины $\rho(x_i)$ получаем хорошо известное из теории вероятностей *биномиальное распределение*

$$\rho(x_i) = C_N^i p^i q^{N-i}, \quad C_N^i = \frac{N!}{i!\,(N-i)!}. \tag{45}$$

Соответствующие полиномы при $B_n = (-1)^n q^n/n!$ называются *полиномами Кравчука* $k_n^{(p)}(x, N)$.

В третьем случае, полагая $a=0$, $b=+\infty$, $C=e^{-\mu}$, приходим к *распределению Пуассона*

$$\rho(x_i) = \frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}. \tag{46}$$

Соответствующие ортогональные полиномы дискретной переменной при $B_n = \mu^{-n}$ называются *полиномами Шарлье* $c_n^{(\mu)}(x)$.

4) Случай $\sigma(x) = 1$ интереса не представляет, так как он не приводит к новым видам ортогональных полиномов.

Из соотношения (23) вытекают следующие *формулы разностного дифференцирования* для полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье:

$$\Delta h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N) = (\alpha+\beta+n+1)\, h_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x, N-1), \tag{47}$$

$$\Delta \tilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x, N) = -(\mu+\nu+2N-n-1)\, \tilde{h}_{n-1}^{(\mu,\nu)}(x, N-1), \tag{48}$$

$$\Delta k_n^{(p)}(x, N) = k_{n-1}^{(p)}(x, N-1), \tag{49}$$

$$\Delta m_n^{(\gamma,\mu)}(x) = -\frac{n(1-\mu)}{\mu}\, m_{n-1}^{(\gamma+1,\mu)}(x), \tag{50}$$

$$\Delta c_n^{(\mu)}(x) = -\frac{n}{\mu}\, c_{n-1}^{(\mu)}(x). \tag{51}$$

Рассмотрим *свойства симметрии* ортогональных полиномов дискретной переменной, вытекающие из свойств симметрии веса $\rho(x)$. Для полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ вес $\rho(x)$ удовлетворяет следующему соотношению симметрии:

$$\rho(x) \equiv \rho(x, \alpha, \beta) = \rho(N-1-x, \beta, \alpha).$$

Поэтому соотношение ортогональности

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_n^{(\alpha,\beta)}(x_i)\, h_m^{(\alpha,\beta)}(x_i)\, \rho(x_i, \alpha, \beta) = 0, \qquad n \neq m,$$

после замены i на $N-1-i$ можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{N-1} h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1-x_i)\, h_m^{(\alpha,\beta)}(N-1-x_i)\, \rho(x_i, \beta, \alpha) = 0, \qquad n \neq m.$$

Так как вес и интервал ортогональности определяют ортогональные полиномы однозначно с точностью до постоянного множителя, то

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1-x) = c_n h_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

где c_n — некоторая постоянная. Приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях равенства с помощью (24), находим $c_n = (-1)^n$,

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1-x) = (-1)^n h_n^{(\beta,\alpha)}(x). \tag{52а}$$

Аналогично, для полиномов Кравчука

$$k_n^{(p)}(x) = (-1)^n k_n^{(q)}(N-x), \qquad p+q=1. \tag{52б}$$

Соотношение (52а) остается справедливым при любых комплексных значениях x, α, β, N. Для доказательства достаточно воспользоваться разностным уравнением для полиномов Хана $y_n(x) = h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$:

$$x(N+\alpha-x)\Delta\nabla y_n(x) + [(\beta+1)(N-1) - (\alpha+\beta+2)x]\Delta y_n(x) + \\ + n(\alpha+\beta+n+1)y_n(x) = 0.$$

Нетрудно проверить, что при замене x на $N-1-x$, α на β, β на α это уравнение сохраняет свой вид. Так как при такой замене полином $y_n(x)$ остается полиномом той же степени, то в силу единственности полиномиальных решений для разностных уравнений гипергеометрического типа приходим к соотношению

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N) = c_n h_n^{(\beta,\alpha)}(N-1-x, N),$$

где c_n — постоянная, которую можно найти, сравнивая коэффициенты при x^n. Полученное соотношение, очевидно, эквивалентно (52а). Подобным же образом можно получить (52б) при любых комплексных x, p, N, а также следующие соотношения:

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N) = h_n^{(-N,\alpha+\beta+N)}(x-\alpha-N, -\alpha), \tag{52в}$$

$$m_n^{(\gamma,\mu)}(x) = \mu^{-n} m_n^{(\gamma,1/\mu)}(-\gamma-x), \tag{52г}$$

$$k_n^{(p)}(x, N) = \frac{p^n}{n!} m_n^{(-N,\ -p/q)}(x) \tag{52д}$$

С помощью формулы Родрига легко вычислить значения полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье на концах отрезка ортогональности. Получим, например, выражение для $h_n^{(\alpha,\beta)}(0)$. Воспользуемся формулой

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f(x-k),$$

которую можно доказать по индукции. Так как для полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ функция $\rho_n(x)$ равна нулю при $x=-1, -2, \ldots,$ то $\nabla^n \rho_n(0) = \rho_n(0)$ и по формуле Родрига

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(0) = (-1)^n \frac{(N-1)!\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(\beta+1)}.$$

Аналогично, для полиномов Мейкснера, Кравчука и Шарлье получим

$$m_n^{(\gamma,\mu)}(0) = \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}, \quad k_n^{(p)}(0) = (-1)^n \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n, \qquad c_n^{(\mu)}(0) = 1.$$

С помощью соотношений симметрии легко найти выражения для $h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1)$ и $k_n^{(p)}(N)$:

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(N-1) = \frac{(N-1)!\,\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(\alpha+1)},$$

$$k_n^{(p)}(N) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q^n.$$

В заключение заметим, что *для любых полиномов $p_n(x)$, удовлетворяющих соотношениям ортогональности вида*

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_n(x_i)\, p_m(x_i)\, \rho_i = d_n^2 \delta_{mn},$$

можно получить также еще одно соотношение ортогональности.

Действительно, если мы рассмотрим матрицу C с элементами

$$C_{ni} = \frac{p_n(x_i)\sqrt{\rho_i}}{d_n},$$

то соотношение ортогональности для полиномов $p_n(x)$ будет эквивалентно свойству унитарности матрицы C:

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_{ni} \bar{C}_{mi} = \delta_{mn}.$$

Поэтому для матрицы C имеют место также равенства

$$\sum_{n=0}^{N-1} C_{nk} C_{nl} = \delta_{kl},$$

которые эквивалентны так называемым *дуальным соотношениям* *ортогональности для полиномов* $p_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_n(x_k)\, p_n(x_l)\, \bar{\rho}_n = \frac{1}{\rho_k}\delta_{kl},$$

где $\bar{\rho}_n = 1/d_n^2$.

Покажем, что для полиномов Хана дуальные соотношения ортогональности приводят к еще одной системе ортогональных полиномов. Для этого нам нужно выявить характер зависимости значений полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ от n при $x=i$ $(i=0,\ 1,\ \ldots)$. Из разностного уравнения для полиномов Хана с помощью равенств

$$\sigma(0)=0, \quad h_n^{(\alpha,\beta)}(0) = (-1)^n \frac{(N-1)!\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(\beta+1)}$$

по индукции можно получить, что

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(i) = (-1)^{n+i} \frac{i!\,(N-i-1)!\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(i+\beta+1)}\, w_i^{(\alpha,\beta)}(t_n),$$

где $t_n = s_n(s_n+1)$, $s_n = (\alpha+\beta)/2+n$, $w_i^{(\alpha,\beta)}(t)$ — полином степени i относительно переменной t, у которого коэффициент при старшей степени равен $1/i!$. Поэтому дуальное соотношение ортогональности для полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ приводит к следующему соотношению ортогональности для полиномов $w_i^{(\alpha,\beta)}(t)$, которые естественно назвать *дуальными полиномами Хана*:

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_k^{(\alpha,\beta)}(t_n)\, w_l^{(\alpha,\beta)}(t_n)\, \tilde{\rho}_n = D_k^2 \delta_{kl},$$

где

$$\tilde{\rho}_n = (\alpha+\beta+2n+1)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+N+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)},$$

$$D_k^2 = \frac{\Gamma(\beta+k+1)}{k!\,(N-k-1)!\,\Gamma(N+\alpha-k)}.$$

Таким образом, для полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ дуальные соотношения ортогональности приводят к дуальным полиномам Хана, ортогональным на неравномерной сетке (см. § 13). Заметим, что рассмотрение дуальных соотношений ортогональности для полиномов Кравчука не приводит к новой системе ортогональных полиномов, т. е. полиномы Кравчука самодуальны.

5. Вычисление основных характеристик. Получим значения основных постоянных для полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье. Вычислим сначала коэффициенты a_n, b_n при старших степенях в разложении

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$$

Для этого достаточно воспользоваться формулами (24), (25).

Квадраты норм d_n^2 можно вычислить по формуле (31). Вычисление квадрата нормы по этой формуле сводится к вычислению суммы

$$S_n = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \rho_n(x_i).$$

Особенно просто величина S_n вычисляется для полиномов Мейкснера, Кравчука и Шарлье. Для этих полиномов

$$\rho_n(x) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^{n} \sigma(x+k) = \rho(x+n) \frac{\Gamma(1+x+n)}{\Gamma(1+x)}.$$

Для полиномов Мейкснера

$$\sum_i \rho_n(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^{i+n}\Gamma(\gamma+i+n)}{i!\,\Gamma(\gamma)}.$$

Так как по формуле Тейлора при $|\mu| < 1$

$$(1-\mu)^{-(\gamma+n)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i\Gamma(\gamma+i+n)}{i!\,\Gamma(\gamma+n)},$$

то для полиномов $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ получаем

$$d_n^2 = \frac{n!\,(\gamma)_n}{\mu^n(1-\mu)^\gamma}. \tag{53а}$$

Для полиномов Кравчука

$$\sum_i \rho_n(x_i) = \sum_{i=0}^{N-n} \frac{N!\,p^{i+n}q^{N-i-n}}{i!\,\Gamma(N+1-i-n)} =$$

$$= \frac{N!\,p^n}{(N-n)!} \sum_{i=0}^{N-n} C_{N-n}^i p^i q^{N-n-i} = \frac{N!\,p^n}{(N-n)!},$$

откуда

$$d_n^2 = C_N^n (pq)^n. \tag{53б}$$

Для полиномов Шарлье

$$\sum_i \rho_n(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^{i+n}}{i!} = \mu^n,$$

откуда

$$d_n^2 = n!/\mu^n. \tag{53в}$$

Для полиномов Хана квадрат нормы вычислим по формуле (31а), так как в этом случае вычисление суммы S_n может быть сведено к вычислению одного слагаемого. В результате получим

$$d_n^2=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)\,(\alpha+\beta+n+1)_N}{(\alpha+\beta+2n+1)\,n!\,(N-n-1)!} & \text{для } h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N),\\[2ex] \dfrac{(\mu+\nu+N-n)_N}{(\mu+\nu+2N-2n-1)n!\,\Gamma(\mu+N-n)\,\Gamma(\nu+N-n)\,(N-n-1)!} & \text{для } \tilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x).\end{cases} \tag{53г}$$

Так как свойство ортогональности (27) для классических ортогональных полиномов дискретной переменной получается из свойства ортогональности для произвольных ортогональных полиномов в результате замены определенного интеграла на сумму, то при соответствующем определении скалярного произведения (y_n, y_m) для полиномов Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье сохраняются все общие свойства произвольных ортогональных полиномов. В частности, справедливо *рекуррентное соотношение*

$$xy_n(x)=\alpha_n y_{n+1}(x)+\beta_n y_n(x)+\gamma_n y_{n-1}(x), \tag{54}$$

коэффициенты в котором могут быть вычислены с помощью известных нам величин a_n, b_n, d_n^2 по следующим формулам:

$$\alpha_n=\frac{a_n}{a_{n+1}},\quad \beta_n=\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}},\quad \gamma_n=\frac{a_{n-1}d_n^2}{a_n d_{n-1}^2}.$$

Рассмотренные выше основные характеристики полиномов Хана, Чебышева, Мейкснера, Кравчука и Шарлье приведены в табл. 3а — 3в.

6. Связь с полиномами Якоби, Лагерра и Эрмита. Естественно ожидать, что при $h\to 0$ полиномиальные решения уравнения (2) при соответствующей нормировке будут переходить в полиномиальные решения уравнения (1), т. е. в полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита. Справедливость этого утверждения проще всего доказать по индукции с помощью соответствующего предельного перехода в рекуррентных соотношениях (54) для рассматриваемых полиномов. В качестве примера выведем предельное соотношение, связывающее полиномы Хана и Якоби.

Прежде всего линейной заменой $x=N(1+s)/2$ переведем интервал ортогональности $(0, N)$ для полиномов Хана в интервал $(-1, 1)$. Тогда уравнение (3) для полиномов $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)=u(s)$ примет вид

$$(1+s)(1-s+\alpha h)\frac{u(s+h)-2u(s)+u(s-h)}{h^2}-$$
$$-[(\alpha+\beta+2)s+\alpha-\beta+(\beta+1)h]\frac{u(s+h)-u(s)}{h}+$$
$$+n(n+\alpha+\beta+1)u(s)=0, \tag{55}$$

где $h=2/N$.

Таблица 3а

Основные характеристики полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ и полиномов Чебышева $t_n(x)$

$y_n(x)$	$h_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$	$t_n(x)$
(a, b)	$(0, N)$	$(0, N)$
$\rho(x)$	$\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+1+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$ $(\alpha>-1, \beta>-1)$	1
$\sigma(x)$	$x(N+\alpha-x)$	$x(N-x)$
$\tau(x)$	$(\beta+1)(N-1)-(\alpha+\beta+2)x$	$N-1-2x$
λ_n	$n(\alpha+\beta+n+1)$	$n(n+1)$
B_n	$(-1)^n/n!$	$(-1)^n/n!$
$\rho_n(x)$	$\frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(n+\beta+1+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-n-x)}$	$\frac{\Gamma(N-x)\Gamma(n+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)}$
a_n	$\frac{1}{n!}(\alpha+\beta+n+1)_n$	$\frac{1}{n!}(n+1)_n$
b_n	$-\frac{1}{(n-1)!}\left[(\beta+1)(N-1)+\frac{n-1}{2}(\alpha-\beta+2N-2)\right](\alpha+\beta+n+1)_{n-1}$	$-\frac{N-1}{(n-1)!}(n)_n$
d_n^2	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)_N}{(\alpha+\beta+2n+1)\,n!\,(N-n-1)!}$	$\frac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)!}$
α_n	$\frac{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}$	$\frac{n+1}{2(2n+1)}$
β_n	$\frac{\alpha-\beta+2N-2}{4}+\frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2N)}{4(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$	$\frac{N-1}{2}$
γ_n	$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+N+n)(N-n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}$	$\frac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}$

При $h \to 0$ уравнение (55) формально переходит в дифференциальное уравнение для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$. Поэтому следует ожидать, что имеет место предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} C_n(N)\, h_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N}{2}(1+s)\right] = P_n^{(\alpha,\beta)}(s), \tag{56}$$

где $C_n(N)$ — некоторая нормировочная постоянная.

Таблица 3б

Основные характеристики полиномов Хана $\tilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x, N)$

$y_n(x)$	$\tilde{h}_n^{(\mu,\nu)}(x, N)$
(a, b)	$(0, N)$
$\rho(x)$	$\dfrac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+\mu+1)\Gamma(N+\nu-x)\Gamma(N-x)}$ $(\mu>-1, \nu>-1)$
$\sigma(x)$ $\tau(x)$ $\lambda(x)$	$x(x+\mu)$ $(N+\nu-1)(N-1)-(2N+\mu+\nu-2)x$ $n(2N+\mu+\nu-n-1)$
B_n	$1/n!$
$\rho_n(x)$	$\dfrac{1}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+\mu+1)\Gamma(N+\nu-n-x)\Gamma(N-n-x)}$
a_n b_n d_n^2	$\dfrac{(-1)^n}{n!}(2N+\mu+\nu-2n)_n$ $\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[(N+\nu-1)(N-1)-\dfrac{n-1}{2}(2N+\nu-\mu-2)\right]\times$ $\times(2N+\mu+\nu-2n+1)_{n-1}$ $\dfrac{(N+\mu+\nu-n)_N}{(2N+\mu+\nu-2n-1)\,n!\,\Gamma(N+\mu-n)\Gamma(N+\nu-n)(N-n-1)!}$
α_n β_n γ_n	$-\dfrac{(n+1)(2N+\mu+\nu-n-1)}{(2N+\mu+\nu-2n-1)(2N+\mu+\nu-2n-2)}$ $\dfrac{2(N-1)+\nu-\mu}{4}+\dfrac{(\mu^2-\nu^2)(2N+\mu+\nu)}{4(2N+\mu+\nu-2n)(2N+\mu+\nu-2n-2)}$ $-\dfrac{(N-n)(N-n+\mu)(N-n+\nu)(N-n+\mu+\nu)}{(2N+\mu+\nu-2n)(2N+\mu+\nu-2n-1)}$

Для доказательства справедливости (56) и выбора нормировочной постоянной $C_n(N)$ сравним рекуррентные соотношения для $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ и $v_n(s, N) = C_n(N)\,h_n^{(\alpha,\beta)}[N(1+s)/2]$:

$$sP_n^{(\alpha,\beta)}(s) = \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(s) + \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}(s) + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(s),$$

Таблица 3в.

Основные характеристики полиномов Мейкснера $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$, Кравчука $k_n^p(x)$ и Шарлье $c_n^{(\mu)}(x)$

$y_n(x)$	$m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$	$k_n^{(p)}(x)$	$c_n^{(\mu)}(x)$
(a, b)	$(0, \infty)$	$(0, N+1)$	$(0, \infty)$
$\rho(x)$	$\dfrac{\mu^x\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(1+x)\Gamma(\gamma)}$ $(\gamma>0,\ 0<\mu<1)$	$\dfrac{N!\,p^x q^{N-x}}{\Gamma(1+x)\Gamma(N+1-x)}$ $(p>0,\ q>0,\ p+q=1)$	$\dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(1+x)}$ $(\mu>0)$
$\sigma(x)$	x	x	x
$\tau(x)$	$\gamma\mu-x(1-\mu)$	$(Np-x)/q$	$\mu-x$
λ_n	$n(1-\mu)$	n/q	n
B_n	$1/\mu^n$	$(-1)^n q^n/n!$	$1/\mu^n$
$\rho_n(x)$	$\dfrac{\mu^{x+n}\Gamma(n+\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1)}$	$\dfrac{N!\,p^{x+n}q^{N-n-x}}{\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-n-x)}$	$\dfrac{e^{-\mu}\mu^{x+n}}{\Gamma(x+1)}$
a_n	$\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)^n$	$\dfrac{1}{n!}$	$\dfrac{1}{(-\mu)^n}$
b_n	$n\left(\gamma+\dfrac{n-1}{2}\dfrac{\mu+1}{\mu}\right)\times\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)^{n-1}$	$-\dfrac{Np+(n-1)\left(\frac{1}{2}-p\right)}{(n-1)!}$	$\dfrac{n\left(1+\frac{n-1}{2\mu}\right)}{(-\mu)^{n-1}}$
d_n^2	$\dfrac{n!\,(\gamma)_n}{\mu^n(1-\mu)^\gamma}$	$\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}(pq)^n$	$\dfrac{n!}{\mu^n}$
α_n	$\dfrac{\mu}{\mu-1}$	$n+1$	$-\mu$
β_n	$\dfrac{n+\mu(n+\gamma)}{1-\mu}$	$n+p(N-2n)$	$n+\mu$
γ_n	$\dfrac{n(n-1+\gamma)}{\mu-1}$	$pq(N-n+1)$	$-n$

$$sv_n=\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)C_n}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)NC_{n+1}}v_{n+1}+$$
$$+\frac{\beta^2-\alpha^2+(2/N)[n(n+\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta-2)-(\beta+1)(\alpha+\beta)]}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}v_n+$$
$$+\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1+\frac{n+\alpha+\beta}{N}\right)\frac{NC_n}{C_{n-1}}v_{n-1}.$$

Из сравнения рекуррентных соотношений видно, что (56) будет выполнено при любых n, если оно выполняется при $n=0$ и дополнительном условии $C_n/C_{n+1}=N$. Отсюда $C_n=N^{-n}$.

Таким образом, мы получили следующее предельное соотношение:

$$\frac{1}{N^n}h_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N}{2}(1+s)\right]=P_n^{(\alpha,\beta)}(s)+O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{57}$$

В частности, для полиномов Чебышева дискретной переменной $t_n(x)$ соотношение (57) имеет вид

$$\frac{1}{N^n}t_n\left[\frac{N}{2}(1+s)\right]=P_n(s)+O\left(\frac{1}{N}\right), \tag{58}$$

где $P_n(s)$ — полином Лежандра.

Тем же методом для полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N)$ можно получить более точное асимптотическое представление

$$\frac{1}{\tilde{N}^n}h_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{\tilde{N}}{2}(1+s)-\frac{\beta+1}{2},N\right]=P_n^{(\alpha,\beta)}(s)+O\left(\frac{1}{\tilde{N}^2}\right), \tag{57a}$$

где $\tilde{N}=N+(\alpha+\beta)/2$ $(N\to\infty)$.

Совершенно аналогично, полагая в уравнении для полиномов Мейкснера $y(x)=u(s)$, $x=s/h$, $h=1-\mu$, приходим к разностному уравнению, которое при $h\to0$ переходит в дифференциальное уравнение

$$su''+(\gamma-s)u'+nu=0.$$

Полиномиальные решения этого уравнения имеют вид $L_n^{\gamma-1}(s)$. Поэтому возможно предельное соотношение

$$\lim_{h\to0}C_n m_n^{(\gamma,1-h)}\left(\frac{s}{h}\right)=L_n^{\gamma-1}(s).$$

Сравнивая коэффициенты при старших степенях, находим $C_n=1/n!$. При помощи рекуррентных соотношений для полиномов Мейкснера и Лагерра получаем

$$\frac{1}{n!}m_n^{(\alpha+1,1-h)}\left(\frac{s}{h}\right)=L_n^{\alpha}(s)+O(h). \tag{59}$$

Рассмотрим теперь вывод предельного соотношения для полиномов Кравчука $k_n^{(p)}(x)$. При выводе этого соотношения удобно опираться на известную из теории вероятностей предельную теорему для биномиального распределения, согласно которой при $N\to\infty$

$$\rho(x_i)=C_N^i p^i q^{N-i}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}\exp\left\{-\frac{(i-Np)^2}{2Npq}\right\},$$

т. е. вес $\rho(x)$ при $x=x_i=i$ для полиномов Кравчука с точностью до нормировочного множителя переходит в вес для полиномов Эрмита: $\rho(s) = e^{-s^2}$, $s = (x - Np)/\sqrt{2Npq}$.

В соответствии с этим в уравнении для полиномов Кравчука положим $x = Np + \sqrt{2Npq}\, s$, $y(x) = u(s)$, $h = 1/\sqrt{2Npq}$. Тогда уравнение для полиномов Кравчука примет вид

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2q}{Np}}\, s\right)\frac{u(s+h) - 2u(s) + u(s-h)}{h^2} - 2s\frac{u(s+h) - u(s)}{h} + $$
$$+ 2nu(s) = 0.$$

При $N \to \infty$ это уравнение формально переходит в дифференциальное уравнение

$$u'' - 2su' + 2nu = 0,$$

полиномиальными решениями которого являются полиномы Эрмита $H_n(s)$. Повторяя рассуждения, которые привели к предельным соотношениям (57)—(59), получим

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{Npq}\right)^{n/2} n!\, k_n^{(p)}\left(Np + \sqrt{2Npq}\, s\right) = H_n(s). \tag{60}$$

7. Связь обобщенных сферических функций с полиномами Кравчука. Покажем, что между обобщенными сферическими функциями и полиномами Кравчука существует связь, которая вытекает непосредственно из свойства унитарности обобщенных сферических функций. Для установления этой связи воспользуемся (10.20) и явным выражением обобщенных сферических функций через полиномы Якоби. Имеем

$$\sum_{m'=-l}^{l} d^l_{mm'}(\beta)\, d^l_{m_1m'}(\beta) = \delta_{mm_1}, \tag{61}$$

где

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{2^m}\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}}\times$$
$$\times(1-\cos\beta)^{(m-m')/2}(1+\cos\beta)^{(m+m')/2}P_{l-m}^{(m-m',m+m')}(\cos\beta). \tag{62}$$

Для выявления вида зависимости функции $d^l_{mm'}(\beta)$ от m' при фиксированных значениях l, m, β воспользуемся формулой Родрига для полиномов Якоби (см. § 5). Применяя формулу Лейбница для вычисления производных от произведения функций, легко убедиться в том, что полином Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ при фиксированных n, x является полиномом относительно α, β, причем сумма наивысших степеней α и β равна n. В нашем случае α и β линейно зависят от m'. Поэтому

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(l+m')!\,(l-m')!}}\left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^{(l-m')/2} q_{l-m}(l-m'), \tag{63}$$

где $q_n(x)$ — полином степени n относительно x. В результате соотношение (61) можно записать в виде

$$\sum_{x=0}^{2l} q_{l-m}(x)\, q_{l-m_1}(x)\, \omega(x) = \delta_{mm_1}, \tag{64}$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{x!\,(2l-x)!}\left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^x.$$

Соотношение (64) означает, что полиномы $q_n(x)$ ортогональны на дискретном множестве точек $x=0, 1, \ldots, 2l$ с весом $\omega(x)$. Нетрудно убедиться в том, что вес $\omega(x)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с весом $\rho(x)$, с которым ортогональны полиномы Кравчука $k_n^{(p)}(x, N)$ на том же множестве точек x при

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}, \quad N = 2l.$$

Поэтому в силу свойства единственности системы ортогональных полиномов при заданном весе полином $q_n(x)$ с точностью до множителя, не зависящего от x, совпадает с полиномом Кравчука $k_n^{(p)}(x, N)$ при $p=\sin^2(\beta/2)$, $N=2l$. Таким образом, из соотношения (63) получаем

$$d^l_{mm'}(\beta) = C\sqrt{\rho(x)}\, k_n^{(p)}(x, N), \tag{65}$$

где $x=l-m'$, $n=l-m$. Нормировочную постоянную $C=C(l, m, \beta)$ можно найти с точностью до знака из соотношения (61) при $m=m_1$:

$$C^2 d_n^2 = 1,$$

где d_n^2 — квадрат нормы для полиномов Кравчука. Для определения знака C достаточно найти знак при старшей степени m' в левой и правой частях соотношения (65), воспользовавшись (62) для $d^l_{mm'}(\beta)$, что дает $C>0$.

Окончательно получаем следующую связь обобщенных сферических функций с полиномами Кравчука:

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{d_n}\sqrt{\rho(x)}\, k_n^{(p)}(x, N), \tag{66}$$

$x=l=m'$, $n=l-m$, $N=2l$, $p=\sin^2(\beta/2)$, $\rho(x)=C_{2l}^x p^x(1-p)^{2l-x}$.

§ 13. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной на неравномерных сетках

1. Разностное уравнение на неравномерной сетке. В § 12 было рассмотрено обобщение теории полиномиальных решений уравнения гипергеометрического типа

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$