соотношение (61) можно записать в виде

$$\sum_{x=0}^{2l} q_{l-m}(x)\, q_{l-m_1}(x)\, \omega(x) = \delta_{mm_1}, \tag{64}$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{x!\,(2l-x)!}\left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^x.$$

Соотношение (64) означает, что полиномы $q_n(x)$ ортогональны на дискретном множестве точек $x=0, 1, \ldots, 2l$ с весом $\omega(x)$. Нетрудно убедиться в том, что вес $\omega(x)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с весом $\rho(x)$, с которым ортогональны полиномы Кравчука $k_n^{(p)}(x, N)$ на том же множестве точек x при

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}, \quad N = 2l.$$

Поэтому в силу свойства единственности системы ортогональных полиномов при заданном весе полином $q_n(x)$ с точностью до множителя, не зависящего от x, совпадает с полиномом Кравчука $k_n^{(p)}(x, N)$ при $p=\sin^2(\beta/2)$, $N=2l$. Таким образом, из соотношения (63) получаем

$$d^l_{mm'}(\beta) = C\sqrt{\rho(x)}\, k_n^{(p)}(x, N), \tag{65}$$

где $x=l-m'$, $n=l-m$. Нормировочную постоянную $C=C(l, m, \beta)$ можно найти с точностью до знака из соотношения (61) при $m=m_1$:

$$C^2 d_n^2 = 1,$$

где d_n^2 — квадрат нормы для полиномов Кравчука. Для определения знака C достаточно найти знак при старшей степени m' в левой и правой частях соотношения (65), воспользовавшись (62) для $d^l_{mm'}(\beta)$, что дает $C>0$.

Окончательно получаем следующую связь обобщенных сферических функций с полиномами Кравчука:

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{d_n}\sqrt{\rho(x)}\, k_n^{(p)}(x, N), \tag{66}$$

$$x=l=m', \; n=l-m, \; N=2l, \; p=\sin^2(\beta/2), \; \rho(x)=C_{2l}^x p^x (1-p)^{2l-x}.$$

§ 13. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной на неравномерных сетках

1. Разностное уравнение на неравномерной сетке. В § 12 было рассмотрено обобщение теории полиномиальных решений уравнения гипергеометрического типа

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

на разностное уравнение

$$\tilde{\sigma}(x)\frac{1}{h}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h}-\frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right]+$$

$$+\frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h}+\frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right]+\lambda y(x)=0, \quad (2)$$

которое аппроксимирует уравнение (1) на сетке с постоянным шагом $\Delta x = h$. Эта теория с помощью замены независимой переменной $x = x(s)$ допускает дальнейшее обобщение на случай, когда дифференциальное уравнение (1) заменяется разностным уравнением на некотором классе сеток с переменным шагом $\Delta x = x(s+h) - x(s)$:

$$\tilde{\sigma}[x(s)]\frac{1}{x(s+h/2)-x(s-h/2)}\left[\frac{y(s+h)-y(s)}{x(s+h)-x(s)}-\frac{y(s)-y(s-h)}{x(s)-x(s-h)}\right]+$$

$$+\frac{\tilde{\tau}[x(s)]}{2}\left[\frac{y(s+h)-y(s)}{x(s+h)-x(s)}+\frac{y(s)-y(s-h)}{x(s)-x(s-h)}\right]+\lambda y(s)=0. \quad (3)$$

Уравнение (3) аппроксимирует (1) со вторым порядком точности относительного шага h, в чем нетрудно убедиться, разлагая функции $x(s \pm h)$, $x(s \pm h/2)$, $y(s \pm h)$ по степеням h с помощью формулы Тейлора.

Для построения теории полиномиальных решений уравнения (3) естественно потребовать, чтобы разностные операторы, соответствующие производным dy/dx и d^2y/dx^2, переводили любой полином $y = y_n(x)$ при $x = x(s)$ в полиномы соответствующих степеней относительно $x(s)$. Это требование будет выполнено, если для любого полинома $y_n(x)$ степени n при $x = x(s)$ имеют место соотношения

$$\frac{y_n[x(s+h)]-y_n[x(s)]}{x(s+h)-x(s)}=p_{n-1}\left[x\left(s+\frac{h}{2}\right)\right], \quad (4)$$

$$\frac{y_n[x(s+h)]+y_n[x(s)]}{2}=q_n\left[x\left(s+\frac{h}{2}\right)\right], \quad (5)$$

где $p_{n-1}(x)$, $q_n(x)$ — некоторые полиномы соответствующих степеней.

Действительно, если функция $x(s)$ выбрана таким образом, что соотношения (4), (5) имеют место, то

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{y_n[x(s+h)]-y_n[x(s)]}{x(s+h)-x(s)}+\frac{y_n[x(s)]-y_n[x(s-h)]}{x(s)-x(s-h)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{p_{n-1}\left[x\left(s+\frac{h}{2}\right)\right]+p_{n-1}\left[x\left(s-\frac{h}{2}\right)\right]\right\}=Q_{n-1}[x(s)],$$

$$\frac{1}{x(s+h/2)-x(s-h/2)}\left\{\frac{y_n[x(s+h)]-y_n[x(s)]}{x(s+h)-x(s)}-\right.$$

$$\left.-\frac{y_n[x(s)]-y_n[x(s-h)]}{x(s)-x(s-h)}\right\}=$$

$$=\frac{p_{n-1}[x(s+h/2)]-p_{n-1}[x(s-h/2)]}{x(s+h/2)-x(s-h/2)}=P_{n-2}[x(s)],$$

где $P_{n-2}(x)$, $Q_{n-1}(x)$ — полиномы соответствующих степеней. Так как $\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$ — полиномы соответственно не выше второй и первой степени, то оператор, стоящий в левой части уравнения (3), в самом деле переводит любой полином $y = y_n(x)$ в некоторый полином той же степени относительно $x(s)$.

2. Классификация сеток. С помощью соотношений

$$\frac{x^n(s+h) - x^n(s)}{x(s+h) - x(s)} = \frac{x(s+h) + x(s)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}(s+h) - x^{n-1}(s)}{x(s+h) - x(s)} + \frac{x^{n-1}(s+h) + x^{n-1}(s)}{2}, \quad (6)$$

$$\frac{x^n(s+h) + x^n(s)}{2} = \frac{x(s+h) + x(s)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}(s+h) + x^{n-1}(s)}{2} + \frac{1}{4}[x(s+h) - x(s)]^2 \frac{x^{n-1}(s+h) - x^{n-1}(s)}{x(s+h) - x(s)} \quad (7)$$

по индукции легко доказать, что условия (4), (5) будут выполнены, если:

а) *функция $x(s)$ удовлетворяет разностному уравнению вида*

$$\frac{x(s+h) + x(s)}{2} = \alpha x\left(s + \frac{h}{2}\right) + \beta, \quad (8)$$

α, β — *некоторые постоянные*;

б) *функция $[x(s+h) - x(s)]^2$ является полиномом не выше второй степени относительно $x(s + h/2)$.*

Для исследования решений уравнения (3) и выбора функций $x(s)$, определяющих сетку, удобно воспользоваться заменой s на hs, в результате которой (3) переходит в уравнение того же вида с шагом $h = 1$ по переменной s:

$$\tilde{\sigma}[x(s)] \frac{\Delta}{\Delta x(s - 1/2)} \left[\frac{\nabla y(x)}{\nabla x(s)}\right] + \frac{\tilde{\tau}[x(s)]}{2} \left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \lambda y(s) = 0, \quad (9)$$

где

$$\Delta f(s) = f(s+1) - f(s), \quad \nabla f(s) = f(s) - f(s-1),$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s - 1/2)} f(s) = \frac{\Delta f(s)}{\Delta x(s - 1/2)}.$$

При этом в условиях а), б) следует положить $h = 1$. В частности, уравнение (8) принимает вид

$$\frac{x(s+1) + x(s)}{2} = \alpha x\left(s + \frac{1}{2}\right) + \beta. \quad (8а)$$

Для дальнейших упрощений удобно воспользоваться тем, что уравнение (9) сохраняет свой вид при заменах $x(s)$ на $Ax(s) + B$, s на $s + C$. При $\alpha \neq 1$ заменой $x(s)$ на $x(s) + \beta/(1 - \alpha)$ уравнение (8а) можно привести к виду

$$\frac{x(s+1) + x(s)}{2} = \alpha x\left(s + \frac{1}{2}\right). \quad (8б)$$

Общее решение этого уравнения при $\alpha \neq 1$ имеет вид

$$x(s) = C_1 q_1^{2s} + C_2 q_2^{2s},$$

где q_1, q_2 — корни уравнения

$$q^2 - 2\alpha q + 1 = 0, \tag{10}$$

C_1, C_2 — произвольные периодические функции с периодом, равным 1/2. Покажем, что условие б) будет выполнено, если C_1, C_2 — постоянные. Имеем

$$\begin{aligned}[x(s+1) - x(s)]^2 &= \left[C_1 q_1^{2s}(q_1^2 - 1) + C_2 q_2^{2s}(q_2^2 - 1)\right]^2 = \\ &= (q_1 - q_2)^2 \left(C_1 q_1^{2s+1} - C_2 q_2^{2s+1}\right)^2 = \\ &= 4(\alpha^2 - 1)\left[\left(C_1 q_1^{2s+1} + C_2 q_2^{2s+1}\right)^2 - 4C_1C_2\right] = \\ &= 4(\alpha^2 - 1)\left[x^2(s + 1/2) - 4C_1C_2\right],\end{aligned}$$

т. е. $[\Delta x(s)]^2$ действительно является полиномом второй степени относительно $x[s + 1/2]$ (мы воспользовались тем, что $q_1 q_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 2\alpha$).

С помощью замен $x(s)$ на $Ax(s) + B$, s на $s + C$, не меняющих вида уравнения (9), выражение для $x(s)$ при $\alpha \geqslant 0$ можно привести к следующим каноническим видам:

1) $$0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \cos\gamma: \quad x(s) = \cos 2\gamma s; \tag{11}$$

2) $$\alpha > 1, \ \alpha = \operatorname{ch}\gamma: \qquad x(s) = \begin{cases} e^{2\gamma s}, \\ e^{-2\gamma s}, \\ \operatorname{sh} 2\gamma s, \\ \operatorname{ch} 2\gamma s. \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что случай $\alpha \leqslant 0$ обычно не представляет практического интереса.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 1$. Уравнение (8а) при $\alpha = 1$ имеет решение вида

$$x(s) = as^2 + bs + c,$$

где $a = 4\beta$, b, c — произвольные периодические функции с периодом, равным 1/2. Нетрудно проверить, что условие б) будет выполнено, если a, b, c — постоянные. С помощью таких же замен, как в случае $\alpha \geqslant 0$, можно выражение для $x(s)$ привести к следующим каноническим видам:

$$x(s) = \begin{cases} s, & \beta = 0, \\ s(s+1), & \beta = 1/4. \end{cases} \tag{13}$$

Случай $x(s) = s$, приводящий к полиномам Хана, Мейкснера, Кравчука и Шарлье, был рассмотрен в § 12.

Для функций $x(s)$ вида (11), (12) соотношения (6), (7) принимают вид

$$\frac{\Delta x^n(s)}{\Delta x(s)} = \alpha x\left(s+\frac{1}{2}\right)\frac{\Delta x^{n-1}(s)}{\Delta x(s)} + \frac{x^{n-1}(s+1)+x^{n-1}(s)}{2}, \tag{6a}$$

$$\frac{x^n(s+1)+x^n(s)}{2} = \alpha x\left(s+\frac{1}{2}\right)\frac{x^{n-1}(s+1)+x^{n-1}(s)}{2} + \\ + \left[(\alpha^2-1)x^2\left(s+\frac{1}{2}\right)+C\right]\frac{\Delta x^{n-1}(s)}{\Delta x(s)}, \tag{7a}$$

где C — постоянная. Из этих соотношений по индукции можно получить, что

$$\frac{\Delta x^n(s)}{\Delta x(s)} = A_n x^{n-1}\left(s+\frac{1}{2}\right) + B_n x^{n-3}\left(s+\frac{1}{2}\right) + \ldots, \tag{14}$$

$$\frac{x^n(s+1)+x^n(s)}{2} = C_n x^n\left(s+\frac{1}{2}\right) + D_n x^{n-2}\left(s+\frac{1}{2}\right) + \ldots, \tag{15}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n — некоторые постоянные. Подставляя (14), (15) в (6а), (7а), приходим к уравнениям для A_n, C_n:

$$A_n = \alpha A_{n-1} + C_{n-1}, \quad C_n = (\alpha^2-1)A_{n-1} + \alpha C_{n-1}.$$

Это линейная однородная система разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которая имеет частные решения вида $A_n = Aq^n$, $C_n = Cq^n$, где $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ — собственный вектор матрицы системы $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha^2-1 & \alpha \end{pmatrix}$, q — собственное значение. Общее решение системы является линейной комбинацией этих частных решений. Так как $A_1 = 1$, $C_1 = \alpha$, то решение разностных уравнений для A_n, C_n имеет вид

$$A_n = \frac{q_1^n - q_2^n}{q_1 - q_2}, \quad C_n = \frac{q_1^n + q_2^n}{2},$$

где q_1, q_2 — собственные значения матрицы системы, т. е. корни уравнения (10).

В дальнейшем будут использоваться обозначения

$$\omega(s) = \frac{q_1^s - q_2^s}{q_1 - q_2}, \quad \psi(s) = \frac{1}{2}(q_1^s + q_2^s), \tag{16}$$

где q_1, q_2 — корни уравнения (10). В этих обозначениях

$$A_n = \omega(n), \quad C_n = \psi(n). \tag{17}$$

Аналогично, для функции $x(s) = s(s+1)$ получим

$$\frac{\Delta x^n(s)}{\Delta x(s)} = nx^{n-1}\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12}x^{n-2}\left(s+\frac{1}{2}\right) + \ldots, \tag{18}$$

$$\frac{x^n(s+1)+x^n(s)}{2} = x^n\left(s+\frac{1}{2}\right) + \frac{n(2n-1)}{4}x^{n-1}\left(s+\frac{1}{2}\right) + \ldots, \tag{19}$$

Соотношения (14), (15) и (18), (19) в дальнейшем будут часто использоваться.

3. Основное свойство разностных уравнений гипергеометрического типа на неравномерных сетках. Покажем, что решения разностного уравнения (9) обладают простым свойством, аналогичным соответствующему свойству решений уравнения (1): *функция* $v_1(s) = \Delta y(s)/\Delta x(s)$ *удовлетворяет уравнению вида* (9) *с заменой* $x(s)$ *на* $x_1(s) = x(s + 1/2)$:

$$\tilde{\sigma}_1[x_1(s)] \frac{\Delta}{\Delta x_1(s-1/2)} \left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)}\right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}_1[x_1(s)]}{2} \left[\frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)}\right] + \mu_1 v_1(s) = 0, \quad (20)$$

где $\tilde{\sigma}_1(x_1)$ *и* $\tilde{\tau}_1(x_1)$ — *некоторые полиномы относительно* x_1 *соответственно не выше второй и первой степени.*

Для доказательства перепишем (9) в виде

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)} \left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \tau(s) \frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)} + \lambda y(s) = 0, \quad (21)$$

где

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}[x(s)] - \frac{1}{2} \tilde{\tau}[x(s)] \Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}[x(s)]. \quad (22)$$

Поскольку

$$\Delta\left[\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] = \nabla\left[\frac{\Delta y(s)}{\Delta x(s)}\right] = \nabla v_1(s),$$

$$\Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right) = \nabla x\left(s + \frac{1}{2}\right) = \nabla x_1(s),$$

то из (21) вытекает следующая связь между функциями $y(s)$ и $v_1(s)$:

$$\sigma(s) \frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} + \tau(s) v_1(s) + \lambda y(s) = 0. \quad (23)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\frac{\Delta}{\Delta x(s)}$, получим

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x(s)} \left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)}\right] + \frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x(s)} \frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \\ + \frac{\Delta\tau(s)}{\Delta x(s)} v_1(s) + \tau(s+1) \frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x(s)} + \lambda v_1(s) = 0.$$

Отсюда

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x_1(s-1/2)} \left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)}\right] + \tau_1(s) \frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \mu_1 v_1(s) = 0, \quad (24)$$

где

$$\mu_1 = \lambda + \frac{\Delta\tau(s)}{\Delta x(s)}, \quad \tau_1(s) = \frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x(s)} + \tau(s+1)\frac{\Delta x_1(s)}{\Delta x(s)}. \tag{25}$$

Так как $\tau(s)$ — полином не выше первой степени относительно $x(s)$, то μ_1, очевидно, не зависит от s.

Перепишем (24) в виде, аналогичном (9):

$$\bar{\sigma}_1(s)\frac{\Delta}{\Delta x_1(s-1/2)}\left[\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)}\right] + \\ + \frac{\tau_1(s)}{2}\left[\frac{\Delta v_1(s)}{\Delta x_1(s)} + \frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)}\right] + \mu_1 v_1(s) = 0, \tag{26}$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s) = \sigma(s) + \frac{1}{2}\tau_1(s)\Delta x_1\left(s - \frac{1}{2}\right).$$

Уравнение (26) будет иметь тот же вид, что и (9), если мы покажем, что

$$\tau_1(s) = \tilde{\tau}_1[x_1(s)], \quad \bar{\sigma}_1(s) = \tilde{\sigma}_1[x_1(s)],$$

где $\tilde{\tau}_1(x_1)$ и $\tilde{\sigma}_1(x_1)$ — полиномы соответственно не выше первой и второй степени. Преобразуем выражения для $\tau_1(s)$ и $\bar{\sigma}_1(s)$, выражая $\tau(s)$ и $\tau(s+1)$ через функции $[\tau(s)+\tau(s+1)]/2$ и $\Delta\tau(s)/\Delta x(s)$, являющиеся полиномами относительно $x_1(s)$:

$$\tau(s) = \frac{\tau(s+1)+\tau(s)}{2} - \frac{\Delta\tau(s)}{\Delta x(s)}\cdot\frac{\Delta x(s)}{2},$$

$$\tau(s+1) = \frac{\tau(s+1)+\tau(s)}{2} + \frac{\Delta\tau(s)}{\Delta x(s)}\cdot\frac{\Delta x(s)}{2}.$$

Согласно (25), (22) имеем

$$\tau_1(s) = \frac{\Delta}{\Delta x(s)}\left\{\tilde{\sigma}[x(s)] - \frac{1}{2}\tau(s)\Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right)\right\} + \tau(s+1)\frac{\Delta x(s+1/2)}{\Delta x(s)} = \\ = \frac{\Delta\tilde{\sigma}[x(s)]}{\Delta x(s)} + \frac{1}{2\Delta x(s)}\left[\tau(s+1)\Delta x\left(s+\frac{1}{2}\right) + \tau(s)\Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right)\right] = \\ = \frac{\Delta\tilde{\sigma}[x(s)]}{\Delta x(s)} + \left[\frac{\tau(s+1)+\tau(s)}{2}\cdot\frac{\Delta x(s+1/2)+\Delta x(s-1/2)}{2\Delta x(s)} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta\tau(s)}{\Delta x(s)}\cdot\frac{\Delta x(s+1/2)-\Delta x(s-1/2)}{4}\right], \tag{27}$$

$$\bar{\sigma}_1(s) = \sigma(s) + \frac{1}{2}\tau_1(s)\Delta x(s) = \\ = \frac{\sigma(s)+\sigma(s+1)}{2} + \frac{1}{2}\tau(s+1)\Delta x\left(s+\frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{\tilde{\sigma}[x(s+1)]+\tilde{\sigma}[x(s)]}{2} + \frac{1}{4}\left[\tau(s+1)\Delta x\left(s+\frac{1}{2}\right) - \tau(s)\Delta x\left(s-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\tilde{\sigma}[x(s+1)] + \tilde{\sigma}[x(s)]}{2} + \left\{\frac{\tau(s+1)+\tau(s)}{2} \cdot \frac{\Delta x(s+1/2) - \Delta x(s-1/2)}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta\tau(s)}{\Delta x(s)} \cdot \frac{\Delta x(s+1/2) + \Delta x(s-1/2)}{2\Delta x(s)} \cdot \frac{[\Delta x(s)]^2}{4}\right\}. \quad (28)$$

С другой стороны, согласно (8а)

$$\frac{x(s+1/2) + x(s-1/2)}{2} = \alpha x(s) + \beta.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta x(s+1/2) + \Delta x(s-1/2)}{2\Delta x(s)} = \frac{\Delta[(x(s+1/2) + x(s-1/2))/2]}{\Delta x(s)} = \alpha, \quad (29)$$

$$\frac{\Delta x(s+1/2) - \Delta x(s-1/2)}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x(s+3/2) + x(s+1/2)}{2} + \frac{x(s+1/2) + x(s-1/2)}{2}\right] -$$

$$- x\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}[\alpha x(s+1) + \beta + \alpha x(s) + \beta] - x\left(s + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \alpha[\alpha x_1(s) + \beta] + \beta - x_1(s) = (\alpha^2 - 1)x_1(s) + (\alpha + 1)\beta. \quad (30)$$

В результате приходим к следующим выражениям для функций $\tau_1(s)$ и $\bar{\sigma}_1(s)$:

$$\tau_1(s) = \frac{\Delta\tilde{\sigma}[x(s)]}{\Delta x(s)} + \alpha\frac{\tilde{\tau}[x(s+1)] + \tilde{\tau}[x(s)]}{2} +$$

$$+ \frac{\Delta\tilde{\tau}[x(s)]}{\Delta x(s)}[(\alpha^2 - 1)x_1(s) + (\alpha + 1)\beta], \quad (31)$$

$$\bar{\sigma}_1(s) = \frac{\tilde{\sigma}[x(s+1)] + \tilde{\sigma}[x(s)]}{2} + \alpha\frac{\Delta\tilde{\tau}[x(s)]}{\Delta x(s)} \cdot \frac{[\Delta x(s)]^2}{4} +$$

$$+ \frac{\tilde{\tau}[x(s+1)] + \tilde{\tau}[x(s)]}{2}[(\alpha^2 - 1)x_1(s) + (\alpha + 1)\beta]. \quad (32)$$

Из этих выражений видно, что функции $\tau_1(s)$ и $\bar{\sigma}_1(s)$ действительно будут полиномами относительно $x_1(s)$ соответственно не выше первой и второй степени.

Таким образом, *при разностном дифференцировании уравнение* (9) *сохраняет свой вид*, т. е. если функция $y(s)$ удовлетворяет (9), то функция $\Delta y(s)/\Delta x(s)$ будет удовлетворять (20).

Справедливо и обратное утверждение: *любое решение уравнения* (20) *при* $\lambda \neq 0$ *можно представить в виде* $v_1(s) = \Delta y(s)/\Delta x(s)$, *где* $y(s)$ — *некоторое решение уравнения* (9).

При доказательстве удобно исходить не из (9), (20), а из эквивалентных им уравнений (21), (24). В соответствии с соотношением (23) рассмотрим функцию

$$y(s) = -\frac{1}{\lambda}\left[\sigma(s)\frac{\nabla v_1(s)}{\nabla x_1(s)} + \tau(s)v_1(s)\right]. \quad (33)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\Delta/\Delta x(s)$,

с помощью (24) для $v_1(s)$ получим $\Delta y(s)/\Delta x(s) = v_1(s)$. Поэтому из (33) вытекает, что функция $y(s)$ действительно является решением уравнения (21), что и требовалось доказать.

Используя метод математической индукции, можно получить, что *функция*

$$v_k(s) = \frac{\Delta v_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $x_k(s) = x(s + k/2)$, $v_0(s) = y(s)$, *удовлетворяет уравнению*

$$\tilde{\sigma}_k[x_k(s)] \frac{\Delta}{\Delta x_k(s-1/2)} \left[\frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)}\right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s)]}{2} \left[\frac{\Delta v_k(s)}{\Delta x_k(s)} + \frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)}\right] + \mu_k v_k(s) = 0, \quad (34)$$

где $\tilde{\sigma}_k(x_k)$, $\tilde{\tau}_k(x_k)$ — *некоторые полиномы относительно* x_k *соответственно не выше второй и первой степени.*

Для полиномов $\tilde{\tau}_k[x_k(s)]$ и $\tilde{\sigma}_k[x_k(s)]$ имеют место соотношения, аналогичные (31), (32):

$$\tilde{\tau}_{k+1}[x_{k+1}(s)] = \frac{\Delta\tilde{\sigma}_k[x_k(s)]}{\Delta x_k(s)} + \alpha \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s+1)] + \tau_k[x_k(s)]}{2} + \\ + \frac{\Delta\tilde{\tau}_k[x_k(x)]}{\Delta x_k(s)} [(\alpha^2 - 1) x_{k+1}(s) + (\alpha + 1)\beta], \quad (35)$$

$$\tilde{\sigma}_{k+1}[x_{k+1}(s)] = \frac{\tilde{\sigma}_k[x_k(s+1)] + \tilde{\sigma}_k[x_k(s)]}{2} + \\ + \alpha \frac{\Delta\tilde{\tau}_k[x_k(s)]}{\Delta x_k(s)} \frac{[\Delta x_k(s)]^2}{4} + \\ + \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s+1)] + \tau_k[x_k(s)]}{2} [(\alpha^2 - 1) x_{k+1}(s) + (\alpha + 1)\beta]. \quad (36)$$

Уравнение (34) эквивалентно уравнению

$$\sigma(s) \frac{\Delta}{\Delta x_k(s-1/2)} \left[\frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)}\right] + \tau_k(s) \frac{\Delta v_k(s)}{\Delta x_k(s)} + \mu_k v_k(s) = 0. \quad (37)$$

Здесь

$$\sigma(s) = \tilde{\sigma}_k[x_k(s)] - \frac{1}{2}\tilde{\tau}_k[x_k(s)]\,\Delta x_k\left(s - \frac{1}{2}\right), \\ \tau_k(s) = \tilde{\tau}_k[x_k(s)]; \quad (38)$$

$$\tau_k(s) = \frac{\Delta\sigma(s)}{\Delta x_{k-1}(s)} + \tau_{k-1}(s+1) \frac{\Delta x_k(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}, \quad \tau_0(s) = \tau(s), \quad (39)$$

$$\mu_k = \mu_{k-1} + \frac{\Delta\tau_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)}. \quad (40)$$

Справедливо и обратное утверждение: *любое решение уравнения* (37) *при* $\mu_{k-1} \neq 0$ *можно представить в виде* $v_k(s) = \Delta v_{k-1}(s)/\Delta x_{k-1}(s)$.

Если переписать (39) в виде

$$\sigma(s) + \tau_k(s)\Delta x_k(s - 1/2) = [\sigma(t) + \tau_{k-1}(t)\Delta x_{k-1}(t - 1/2)]|_{t=s+1}, \quad (41)$$

то по индукции можно получить следующее выражение для $\tau_m(s)$:

$$\tau_m(s) = \frac{1}{\Delta x(s + (m-1)/2)} \times$$
$$\times \left[\sigma(s+m) - \sigma(s) + \tau(s+m)\Delta x\left(s + m - \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (42)$$

Выражение для μ_m можно получить непосредственно из (40):

$$\mu_m = \lambda + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta\tau_k(s)}{\Delta x_k(s)}. \quad (43)$$

Получим выражения для $\tau_k(s) = \tilde{\tau}_k[x_k(s)]$ и μ_m в случае функций $x(s)$ вида (11), (12) ($\alpha \neq 1$, $\beta = 0$). Пусть разложения полиномов $\tilde{\sigma}_k(x_k)$, $\tilde{\tau}_k(x_k)$ по степеням x_k имеют вид

$$\tilde{\sigma}_k(x_k) = \tilde{\sigma}_k(0) + \tilde{\sigma}_k'(0)x_k + \frac{\tilde{\sigma}_k''}{2}x_k^2, \qquad \tilde{\tau}_k(x_k) = \tilde{\tau}_k(0) + \tilde{\tau}_k' x_k. \quad (44)$$

Так как $[\Delta x_k(s)]^2/4 = (\alpha^2 - 1)x_{k+1}^2(s) + c$, ($c$ — постоянная) то, сравнивая в (35), (36) коэффициенты при одинаковых степенях $x_{k+1}(s)$, с помощью вытекающих из (14), (15), (17) равенств

$$\frac{x_k(s+1) + x_k(s)}{2} = \alpha x_{k+1}(s),$$

$$\frac{\Delta x_k^2(s)}{\Delta x_k(s)} = 2\alpha x_{k+1}(s),$$

$$\frac{x_k^2(s+1) + x_k^2(s)}{2} = (2\alpha^2 - 1)x_{k+1}^2(s) + c$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{k+1}'' &= (2\alpha^2 - 1)\tilde{\sigma}_k'' + 4\alpha(\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}_k', \\ \tilde{\tau}_{k+1}' &= \alpha\tilde{\sigma}_k'' + (2\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}_k'; \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{k+1}'(0) &= \alpha\tilde{\sigma}_k'(0) + (\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}_k(0), \\ \tilde{\tau}_{k+1}(0) &= \tilde{\sigma}_k'(0) + \alpha\tilde{\tau}_k(0). \end{aligned} \quad (46)$$

Эти системы уравнений являются линейными однородными системами разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Собственными значениями матрицы системы (45)

$$\begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 1 & 4\alpha(\alpha^2 - 1) \\ \alpha & 2\alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$$

будут q_1^2 и q_2^2, где q_1, q_2 — корни уравнения (10), а собственными

значениями матрицы системы (46) будут q_1 и q_2. В соответствии с этим величины $\tilde{\sigma}''_k$ и $\tilde{\tau}'_k$ будут линейными комбинациями q_1^{2k} и q_2^{2k}, а величины $\tilde{\sigma}'_k(0)$ и $\tilde{\tau}_k(0)$ будут линейными комбинациями q_1^k и q_2^k. Так как

$$\tilde{\sigma}''_0 = \tilde{\sigma}'', \quad \tilde{\tau}'_0 = \tilde{\tau}', \quad \tilde{\sigma}'_0(0) = \tilde{\sigma}'(0), \quad \tilde{\tau}_0(0) = \tilde{\tau}(0), \tag{47}$$

то решения систем (45), (46) с дополнительными условиями (47) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}''_k &= \tilde{\sigma}''\psi(2k) + 4(\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}'\omega(2k), \\ \tilde{\tau}'_k &= \frac{1}{2}\tilde{\sigma}''\omega(2k) + \tilde{\tau}'\psi(2k); \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'_k(0) &= \tilde{\sigma}'(0)\psi(k) + (\alpha^2 - 1)\tilde{\tau}(0)\omega(k), \\ \tilde{\tau}_k(0) &= \tilde{\sigma}'(0)\omega(k) + \tilde{\tau}(0)\psi(k) \end{aligned} \tag{49}$$

(мы воспользовались обозначениями (16)).

Подобным же образом для функции $x(s) = s(s+1)$ получим

$$\tilde{\sigma}''_k = \tilde{\sigma}'', \quad \tilde{\tau}'_k = \tilde{\tau}' + k\tilde{\sigma}''; \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'_k(0) &= \tilde{\sigma}'(0) + \frac{3}{4}k^2\tilde{\sigma}'' + \frac{3}{2}k\tilde{\tau}', \\ \tilde{\tau}_k(0) &= \tilde{\tau}(0) + \frac{3}{4}k^2\tilde{\tau}' + k\tilde{\sigma}'(0) + \frac{k^3}{4}\tilde{\sigma}''. \end{aligned} \tag{51}$$

С помощью (43), (44), (48)—(51) приходим к следующим выражениям для постоянной μ_m: для $x(s)$ вида (11), (12)

$$\mu_m = \lambda + \omega(m)\left[\psi(m-1)\tilde{\tau}' + \omega(m-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}\right], \tag{52}$$

для $x(s) = s(s+1)$

$$\mu_m = \lambda + m\tilde{\tau}' + \frac{m(m-1)}{2}\tilde{\sigma}''. \tag{53}$$

4. Формула Родрига. Рассмотренное свойство разностного уравнения (9) позволяет построить семейство частных решений этого уравнения, соответствующих определенным значениям λ. Действительно, уравнение для функции $v_n(s)$

$$\sigma(s)\frac{\Delta}{\Delta x_n(s-1/2)}\left[\frac{\nabla v_n(s)}{\nabla x_n(s)}\right] + \tau_n(s)\frac{\Delta v_n(s)}{\Delta x_n(s)} + \mu_n v_n(s) = 0$$

при $\mu_n = 0$ имеет частное решение $v_n(s) = c$.

Покажем, что при $k < n$ функции $v_k(s)$, связанные соотношениями $v_{k+1}(s) = \Delta v_k(s)/\Delta x_k(s)$, при дополнительном требовании $\mu_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ будут полиномами степени $n-k$ относительно $x_k(s)$. Доказательство проведем по индукции, предполагая, что функция $v_{k+1}(s)$ является полиномом степени $n-k-1$

относительно $x_{k+1}(s)$. Из уравнения (34) имеем

$$v_k(s) = -\frac{1}{\mu_k}\left\{\tilde{\sigma}_k[x_k(s)]\frac{\nabla v_{k+1}(s)}{\nabla x_{k+1}(s)} + \frac{\tilde{\tau}_k[x_k(s)]}{2}[v_{k+1}(s) + v_{k+1}(s-1)]\right\}.$$

Согласно (4), (5) функции $\nabla v_{k+1}(s)/\nabla x_{k+1}(s)$ и $[v_{k+1}(s) + v_{k+1}(s-1)]/2$ являются полиномами относительно $x_{k+2}(s-1)$ соответственно степени $n-k-2$ и $n-k-1$. Так как $x_{k+2}(s-1) = x_k(s)$, то функция $v_k(s)$ будет, очевидно, полиномом степени $n-k$ относительно $x_k(s)$. Последовательно применяя эти рассуждения для $k = n-1, n-2, \ldots$, получим, что существует решение уравнения (9) $y(s) = v_0(s)$ в виде полинома степени n относительно $x(s)$ при таком значении $\lambda = \lambda_n$, для которого $\mu_n = 0$. Чтобы получить явное выражение для $y(s)$ в этом случае, запишем уравнения (21), (37) в самосопряженном виде:

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)}\left[\sigma(s)\rho(s)\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right] + \lambda\rho(s)y(s) = 0, \tag{54}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x_k(s-1/2)}\left[\sigma(s)\rho_k(s)\frac{\nabla v_k(s)}{\nabla x_k(s)}\right] + \mu_k\rho_k(s)v_k(s) = 0. \tag{55}$$

Здесь функции $\rho(s)$ и $\rho_k(s)$ удовлетворяют разностным уравнениям

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)}[\sigma(s)\rho(s)] = \tau(s)\rho(s), \tag{56}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x_k(s-1/2)}[\sigma(s)\rho_k(s)] = \tau_k(s)\rho_k(s). \tag{57}$$

Используя формулы (57), (39), получим связь функций $\rho_k(s)$ и $\rho(s)$. Имеем

$$\frac{\sigma(s+1)\rho_k(s+1)}{\rho_k(s)} = \sigma(s) + \tau_k(s)\Delta x_k\left(s-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sigma(s+1) + \tau_{k-1}(s+1)\Delta x_{k-1}\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma(s+2)\rho_{k-1}(s+2)}{\rho_{k-1}(s+1)},$$

откуда

$$\frac{\sigma(s+1)\rho_{k-1}(s+1)}{\rho_k(s)} = \frac{\sigma(s+2)\rho_{k-1}(s+2)}{\rho_k(s+1)} = C(s),$$

где $C(s)$ — произвольная периодическая функция с периодом, равным единице. Полагая $C(s) = 1$, находим

$$\rho_k(s) = \sigma(s+1)\rho_{k-1}(s+1). \tag{58}$$

Поэтому

$$\rho_k(s) = \rho(s+k)\prod_{i=1}^{k}\sigma(s+i). \tag{59}$$

С помощью (58) уравнение (55) можно записать в виде простого соотношения, связывающего функции $v_k(s)$ и $v_{k+1}(s)$:

$$\rho_k(s)\, v_k(s) = -\frac{1}{\mu_k}\cdot\frac{\nabla}{\nabla x_{k+1}(s)}\,[\rho_{k+1}(s)\, v_{k+1}(s)]. \tag{60}$$

Отсюда получаем

$$\rho_k(s)\, v_k(s) = \frac{A_k}{A_n} D_k^{(n)}\,[\rho_n(s)\, v_n(s)]. \tag{61}$$

Здесь

$$A_k = (-1)^k \prod_{i=0}^{k-1} \mu_i, \quad A_0 = 1,$$

$$D_k^{(n)}[f(s)] = \widehat{M}_{k+1}\widehat{M}_{k+2}\ldots\widehat{M}_n[f(s)], \quad \widehat{M}_m[f(s)] = \frac{\nabla f(s)}{\nabla x_m(s)}.$$

Напомним, что по определению

$$v_k(s) = \frac{\Delta v_{k-1}(s)}{\Delta x_{k-1}(s)},$$

т. е.

$$v_k(s) = \Lambda^{(k)}[y(s)], \tag{62}$$

где

$$\Lambda^{(k)}[f(s)] = \widehat{L}_{k-1}\widehat{L}_{k-2}\ldots\widehat{L}_0[f(s)], \quad \widehat{L}_m[f(s)] = \frac{\Delta f(s)}{\Delta x_m(s)}.$$

Если $v_n(s) = C_n$ (C_n — постоянная), то, как было показано выше, функция $y(s)$ будет полиномом степени n относительно $x(s)$, т. е. $y = y_n(s) \equiv \tilde{y}_n[x(s)]$. В этом случае для функции

$$v_{kn}(s) = \Lambda^{(k)}[y_n(s)]$$

из (61) получаем следующее выражение:

$$v_{kn}(s) = \frac{A_{kn}B_n}{\rho_k(s)} D_k^{(n)}[\rho_n(s)], \tag{63}$$

где

$$A_{kn} = A_k(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_n} = (-1)^k \prod_{m=0}^{k-1} \mu_{mn},$$

$$\mu_{mn} = \lambda_n - \lambda_m, \quad B_n = \frac{C_n}{A_{nn}}$$

(B_n — нормировочная постоянная).

В частности, при $k = 0$ из (63) получаем *аналог формулы Родрига* для полинома $\tilde{y}_n[x(s)] \equiv y_n(s)$:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} D^{(n)}[\rho_n(s)], \quad D^{(n)} \equiv D_0^{(n)}. \tag{64}$$

Легко убедиться в том, что произвол в выборе периодического

множителя для функции $\rho(s)$ не влияет на явный вид полиномов $\tilde{y}_n(x)$, получаемых по этой формуле.

Таким образом, полиномиальные решения уравнения (9) $y = \tilde{y}_n[x(s)]$ определяются формулой (64) однозначно с точностью до нормировочного множителя B_n. Эти решения соответствуют значениям $\lambda = \lambda_n$, для которых $\mu_n = 0$. Для $x(s)$ вида (11), (12) в соответствии с (52), (16) имеем

$$\lambda_n = -\omega(n)\left[\psi(n-1)\tilde{\tau}' + \omega(n-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}\right]. \tag{65}$$

Отсюда получаем

$$\mu_{mn} = \lambda_n - \lambda_m = -\omega(n-m)\left[\psi(n+m-1)\tilde{\tau}' + \omega(n+m-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}\right],$$

$$A_{kn} = \prod_{m=0}^{k-1}\omega(n-m)\prod_{m=0}^{k-1}\left[\psi(n+m-1)\tilde{\tau}' + \omega(n+m-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}\right]. \tag{65a}$$

Для $x(s) = s(s+1)$

$$\lambda_n = -n\tilde{\tau}' - \frac{n(n-1)}{2}\tilde{\sigma}''; \tag{66}$$

$$\mu_{mn} = -(n-m)\left(\tilde{\tau}' + \frac{n+m-1}{2}\tilde{\sigma}''\right),$$

$$A_{kn} = \frac{n!}{(n-k)!}\prod_{m=0}^{k-1}\left(\tilde{\tau}' + \frac{n+m-1}{2}\tilde{\sigma}''\right). \tag{66a}$$

Рассмотрим некоторые следствия из формулы Родрига (63).

1) Так как выражение $\widehat{M}_m[f(s)] = \nabla f(s)/\nabla x_m(s)$ при замене s на $s-1/2$ переходит в $\widehat{M}_{m-1}[f(s-1/2)]$, то

$$v_{1n}\left(s-\frac{1}{2}\right) = \frac{A_{1n}B_n}{\rho_1(s-1/2)}D^{(n-1)}\left[\rho_n\left(s-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Если положить $\bar{\rho}(s) = \rho_1(s-1/2)$, $\bar{\sigma}(s) = \sigma(s-1/2)$, то с помощью (59) получим

$$\rho_n\left(s-\frac{1}{2}\right) = \rho\left(s+n-\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\sigma\left(s-\frac{1}{2}+i\right) =$$

$$= \rho_1\left(s+n-\frac{3}{2}\right)\prod_{i=1}^{n-1}\sigma\left(s-\frac{1}{2}+i\right) = \bar{\rho}(s+n-1)\prod_{i=1}^{n-1}\bar{\sigma}(s+i),$$

т. е. $\rho_n(s-1/2) = \bar{\rho}_{n-1}(s)$. Поэтому

$$\left.\frac{\Delta y_n(t)}{\Delta x(t)}\right|_{t=s-1/2} = \frac{\bar{B}_{n-1}}{\bar{\rho}(s)}D^{(n-1)}\left[\bar{\rho}_{n-1}(s)\right],$$

$$\bar{B}_{n-1} = A_{1n}B_n = -\lambda_n B_n. \tag{67}$$

Таким образом, функция $\Delta y_n(s-1/2)/\Delta x(s-1/2)$, являющаяся полиномом $n-1$-й степени относительно $x(s)$, определяется фор-

мулой Родрига, в которой следует заменить $\rho(s)$ на $\bar{\rho}(s) = \rho_1(s-1/2)$, $\sigma(s)$ на $\bar{\sigma}(s) = \sigma(s-1/2)$. При этом роль нормировочной постоянной играет величина $\bar{B}_{n-1}$. Соотношение (67) аналогично формулам дифференцирования (12.23).

2) С помощью (63) при $k = n-1$ можно вычислить коэффициенты a_n, b_n при старших степенях $x = x(s)$ в разложении

$$\tilde{y}_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$$

Согласно (62) имеем

$$v_{n-1,n}(s) = a_n \Lambda^{(n-1)}[x^n(s)] + b_n \Lambda^{(n-1)}[x^{n-1}(s)].$$

С другой стороны, согласно (63), (57), (58)

$$v_{n-1,n}(s) = \frac{A_{n-1,n}B_n}{\rho_{n-1}(s)} \cdot \frac{\nabla \rho_n(s)}{\nabla x_n(s)} = \frac{A_{n-1,n}B_n}{\rho_{n-1}(s)} \cdot \frac{\nabla[\sigma(s+1)\rho_{n-1}(s+1)]}{\nabla x_n(s)} =$$

$$= \frac{A_{n-1,n}B_n}{\rho_{n-1}(s)} \cdot \frac{\Delta[\sigma(s)\rho_{n-1}(s)]}{\Delta x_{n-1}(s-1/2)} = A_{n-1,n}B_n \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)].$$

Поэтому величины a_n, b_n можно найти, сравнивая коэффициенты при различных степенях $x_{n-1}(s)$ в равенстве

$$a_n \Lambda^{(n-1)}[x^n(s)] + b_n \Lambda^{(n-1)}[x^{n-1}(s)] = A_{n-1,n}B_n \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)]. \quad (68)$$

Оператор $\Lambda^{(k)}$ переводит любой полином степени n относительно $x(s)$ в полином степени $n-k$ относительно $x_k(s)$. Следовательно,

$$\Lambda^{(k)}[x^n(s)] = \alpha_{kn} x_k^{n-k}(s) + \beta_{kn} x_k^{n-k-1}(s) + \ldots, \quad (69)$$

где α_{kn}, β_{kn} — постоянные. Отсюда с помощью (68) получим

$$a_n[\alpha_{n-1,n} x_{n-1}(s) + \beta_{n-1,n}] + b_n \alpha_{n-1,n-1} =$$

$$= A_{n-1,n}B_n[\tilde{\tau}'_{n-1} x_{n-1}(s) + \tilde{\tau}_{n-1}(0)],$$

откуда

$$a_n = A_{n-1,n}B_n \frac{\tilde{\tau}'_{n-1}}{\alpha_{n-1,n}},$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\alpha_{n-1,n}\tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\alpha_{n-1,n-1}\tilde{\tau}'_{n-1}} - \frac{\beta_{n-1,n}}{\alpha_{n-1,n-1}}. \quad (70)$$

Для $x(s)$ вида (11), (12), согласно (14), (16), (17),

$$\alpha_{kn} = \prod_{m=0}^{k-1} \omega(n-m), \quad \beta_{kn} = 0,$$

откуда

$$a_n = B_n \prod_{m=0}^{n-1} \left[\psi(n+m-1)\tilde{\tau}' + \omega(n+m-1)\frac{\tilde{\sigma}''}{2}\right],$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \omega(n)\frac{\tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\tilde{\tau}'_{n-1}}, \quad (71)$$

где величины $\tilde{\tau}'_{n-1}$, $\tilde{\tau}_{n-1}(0)$ определяются по формулам (48), (49).

При $x(s)=s(s+1)$ для вычисления постоянных α_{kn}, β_{kn} воспользуемся формулой (18) и равенством

$$\Lambda^{(k+1)}\left[x^n(s)\right]=\frac{\Delta}{\Delta x_k(s)}\left\{\Lambda^k\left[x^n(s)\right]\right\},$$

которое приводит к соотношению

$$\alpha_{k+1,n}x_{k+1}^{n-k-1}(s)+\beta_{k+1,n}x_{k+1}^{n-k-2}(s)=$$
$$=\alpha_{kn}\left[(n-k)\,x_{k+1}^{n-k-1}(s)+\frac{(n-k)(n-k-1)(2n-2k-1)}{12}x_{k+1}^{n-k-2}(s)\right]+$$
$$+\beta_{kn}(n-k-1)\,x_{k+1}^{n-k-2}(s).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x_{k+1}(s)$, приходим к системе уравнений

$$\alpha_{k+1,n}=(n-k)\,\alpha_{kn},$$
$$\beta_{k+1,n}=(n-k-1)\,\beta_{kn}+\frac{(n-k)(n-k-1)(2n-2k-1)}{12}\alpha_{kn},$$
$$\alpha_{1n}=n,\quad \beta_{1n}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}.$$

Из первого уравнения получаем

$$\alpha_{kn}=\frac{n!}{(n-k)!}. \tag{72}$$

После подстановки найденного выражения для α_{kn} во второе уравнение приходим к линейному неоднородному разностному уравнению первого порядка для β_{kn}, которое может быть решено методом вариации постоянных. В результате получаем

$$\beta_{kn}=\frac{k(2n-k)\,n!}{12(n-k-1)!}. \tag{73}$$

Окончательно, при $x(s)=s(s+1)$ с помощью (70), (72), (73) приходим к следующим выражениям для a_n, b_n:

$$\begin{aligned} a_n&=B_n\prod_{m=0}^{n-1}\left(\tilde{\tau}'+\frac{n+m-1}{2}\tilde{\sigma}''\right),\\ \frac{b_n}{a_n}&=n\frac{\tilde{\tau}_{n-1}(0)}{\tilde{\tau}'_{n-1}}-\frac{n(n^2-1)}{12}. \end{aligned} \tag{74}$$

5. Свойство ортогональности. Докажем свойство ортогональности для рассмотренных выше полиномиальных решений уравнения (9). Для этого запишем уравнения для $y_m(s)$ и $y_n(s)$ в самосопряженном виде:

$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)}\left[\sigma(s)\,\rho(s)\frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}\right]+\lambda_m\rho(s)\,y_m(s)=0,$$
$$\frac{\Delta}{\Delta x(s-1/2)}\left[\sigma(s)\,\rho(s)\frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)}\right]+\lambda_n\rho(s)\,y_n(s)=0.$$

Умножая первое уравнение на $y_n(s)$, второе на $y_m(s)$ и вычитая

из первого уравнения второе, получим

$$(\lambda_m - \lambda_n)\, y_m(s)\, y_n(s)\, \rho(s)\, \Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= y_m(s)\, \Delta\left[\sigma(s)\, \rho(s)\, \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)}\right] - y_n(s)\, \Delta\left[\sigma(s)\, \rho(s)\, \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}\right].$$

Правую часть полученного соотношения преобразуем с помощью тождества

$$\Delta\left\{\sigma(s)\, \rho(s)\left[y_m(s)\, \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s)\, \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}\right]\right\} =$$

$$= y_m(s)\, \Delta\left[\sigma(s)\, \rho(s)\, \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)}\right] - y_n(s)\, \Delta\left[\sigma(s)\, \rho(s)\, \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}\right].$$

Тогда

$$(\lambda_m - \lambda_n)\, y_m(s)\, y_n(s)\, \rho(s)\, \Delta x\left(s - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \Delta\left\{\sigma(s)\, \rho(s)\left[y_m(s)\, \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s)\, \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}\right]\right\}.$$

Положим здесь $s = s_i$, $s_{i+1} = s_i + 1$ и просуммируем по тем значениям индекса i, для которых $a \leqslant s_i \leqslant b - 1$:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_{s_i = a}^{b-1} y_m(s_i)\, y_n(s_i)\, \rho(s_i)\, \Delta x\left(s_i - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sigma(s)\, \rho(s)\left[y_m(s)\, \frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s)\, \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}\right]\Bigg|_a^b.$$

Так как $y_m(s)$, $y_n(s)$ — полиномы относительно $x(s)$, $\nabla y_m(s)/\nabla x(s)$, $\nabla y_n(s)/\nabla x(s)$ — полиномы относительно $x(s - 1/2)$, то $y_m(s)\frac{\nabla y_n(s)}{\nabla x(s)} - y_n(s)\, \frac{\nabla y_m(s)}{\nabla x(s)}$ — линейная комбинация произведений вида $x^k(s)x^l(s - 1/2)$ $(k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots)$. Поэтому при выполнении граничных условий

$$\sigma(s)\rho(s)x^k(s)x^l(s - 1/2)|_{s=a,\,b} = 0, \qquad k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{75}$$

подстановка в правой части будет равна нулю, и при $m \neq n$ получим

$$\sum_{s_i = a}^{b-1} y_m(s_i)\, y_n(s_i)\rho(s_i)\, \Delta x\left(s_i - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{76}$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнения (55) при $k = 1$, легко показать, что для функций $v_{1n}(s)$ имеет место следующее соотношение ортогональности:

$$\sum_{s_i = a_1}^{b_1 - 1} v_{1m}(s_i)\, v_{1n}(s_i)\, \rho_1(s_i)\, \Delta x_1\left(s_i - \frac{1}{2}\right) = 0$$

при $m \neq n$, если выполнены граничные условия

$$\sigma(s)\rho_1(s)x_1^k(s)x_1^l(s-1/2)\big|_{s=a_1,b_1}=0, \qquad k,l=0,1,\ldots \tag{75a}$$

Покажем, что, как и в простейшем случае $x(s)=s$, можно положить $a_1=a$, $b_1=b-1$.

Функция $\sigma(s)x_1^k(s)x_1^l(s-1/2)$ в силу (22) является полиномом относительно $x(s-1/2)$, $x(s)$ и $x(s+1/2)$. Так как $\rho_1(s)=\sigma(s+1)\rho(s+1)$, а $x(s-1/2)$ и $x(s)$ можно с помощью (8а) представить в виде линейной комбинации функций $x(s+1/2)$ и $x(s+1)$, то $\sigma(s)\rho_1(s)x_1^k(s)x_1^l(s-1/2)$ можно представить в виде комбинации функций вида $\sigma(s+1)\rho(s+1)x^h(s+1)x^l(s+1/2)$. Поэтому в силу (75)

$$\sigma(s)\rho_1(s)x_1^k(s)x_1^l(s-1/2)\big|_{s=b-1}=0.$$

Тем же способом с помощью равенства

$$\sigma(s)\rho_1(s)=\sigma(s)\rho(s)[\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-1/2)]$$

можно убедиться в выполнении условия

$$\sigma(s)\rho_1(s)x_1^k(s)x_1^l(s-1/2)\big|_{s=a}=0.$$

По индукции аналогичным образом можно доказать, что при выполнении условия (75) для полиномов $v_{kn}(s)$ имеют место следующие соотношения ортогональности:

$$\sum_{s_i=a}^{b-k-1} v_{km}(s_i)v_{kn}(s_i)\rho_k(s_i)\Delta x_k\left(s_i-\frac{1}{2}\right)=\delta_{mn}d_{kn}^2. \tag{77}$$

Для того чтобы квадраты норм d_{kn}^2 были положительными, будем в дальнейшем считать, что $\rho_k(s_i)\Delta x_k(s_i-1/2)>0$ при $a\leqslant s_i\leqslant b-k-1$.

Для вычисления квадрата нормы $d_n^2\equiv d_{0n}^2$ установим предварительно связь величин d_{kn}^2 и $d_{k+1,n}^2$. Умножая обе части уравнения (55) при $s=s_i$, $\lambda=\lambda_n$ на $\rho_k(s_i)v_{kn}(s_i)\Delta x_k(s_i-1/2)$ и применяя формулу суммирования по частям, получим

$$\mu_{kn}d_{kn}^2=-\sum_i v_{kn}(s_i)\Delta\left[\sigma(s_i)\rho_k(s_i)\frac{\nabla v_{kn}(s_i)}{\nabla x_k(s_i)}\right]=$$

$$=-v_{kn}(s_i)\sigma(s_i)\rho_k(s_i)\frac{\nabla v_{kn}(s_i)}{\nabla x_{kn}(s_i)}\Bigg|_a^{b-k}+$$

$$+\sum_i\sigma(s_{i+1})\rho_k(s_i+1)\left[\frac{\Delta v_{kn}(s_i)}{\Delta x_k(s_i)}\right]^2\Delta x_k(s_i)=$$

$$=\sum_i v_{k+1,n}^2(s_i)\rho_{k+1}(s_i)\Delta x_{k+1}\left(s_i-\frac{1}{2}\right)=d_{k+1,n}^2.$$

Отсюда последовательно находим

$$d_n^2 = d_{0n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} d_{1n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}\mu_{1n}} d_{2n}^2 = \ldots = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} d_{nn}^2 =$$

$$= \frac{v_{nn}^2(x)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} S_n = (-1)^n A_{nn} B_n^2 S_n, \qquad (78)$$

где

$$S_n = \sum_{s_i=a}^{b-n-1} \rho_n(s_i)\,\Delta x_n\left(s_i - \frac{1}{2}\right). \qquad (79)$$

В случае конечных значений a, b имеем $b-a=N$, где N — натуральное число. При $n=N-1$ сумма S_n содержит лишь одно слагаемое и поэтому легко вычисляется:

$$S_{n-1} = \rho_{N-1}(a)\Delta x_{N-1}(a-1/2). \qquad (79а)$$

Чтобы вычислить S_n при $n<N-1$, достаточно уметь вычислять отношение S_{n-1}/S_n. Для этого преобразуем выражение для S_n, используя связь функций $\rho_n(s)$ и $\rho_{n-1}(s)$:

$$\rho_n(s) = \sigma(s+1)\rho_{n-1}(s+1) = \rho_{n-1}(s)[\sigma(s) + \tau_{n-1}(s)\Delta x_{n-1}(s-1/2)].$$

Отсюда, с одной стороны,

$$S_n = \sum_i \sigma(s_i+1)\,\rho_{n-1}(s_i+1)\,\Delta x_n\left(s_i - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_i \sigma(s_i)\,\rho_{n-1}(s_i)\,\Delta x_n\left(s_i - \frac{3}{2}\right).$$

С другой стороны,

$$S_n = \sum_i \rho_{n-1}(s_i)\left[\sigma(s_i) + \tau_{n-1}(s_i)\,\Delta x_{n-1}\left(s_i - \frac{1}{2}\right)\right]\Delta x_n\left(s_i - \frac{1}{2}\right).$$

Возьмем полусумму этих выражений. С учетом (22) получим

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_i \rho_{n-1}(s_i)\,\Delta x_{n-1}\left(s_i - \frac{1}{2}\right)\Big\{\tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] \times$$

$$\times \frac{\Delta x_n(s_i - 1/2) + \Delta x_n(s_i - 3/2)}{\Delta x_{n-1}(s_i - 1/2)} +$$

$$+ \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)]\,\frac{\Delta x_n(s_i - 1/2) - \Delta x_n(s_i - 3/2)}{2}\Big\}.$$

Если воспользоваться соотношениями (29), (30), то

$$S_n = \sum_i \rho_{n-1}(s_i)\,\Delta x_{n-1}\left(s_i - \frac{1}{2}\right) Q_n[x_{n-1}(s_i)],$$

где

$$Q[x_{n-1}(s)] = \alpha\tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s)] + \\ + \tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)][(\alpha^2-1)x_{n-1}(s) + (\alpha+1)\beta] \quad (80)$$

есть полином не выше второй степени относительно $x_{n-1}(s)$. Разложим $Q_n(x_{n-1})$ по степеням полинома первой степени $\tilde{\tau}_{n-1}(x_{n-1})$:

$$Q_n(x_{n-1}) = A_n\tilde{\tau}^2_{n-1}(x_{n-1}) + B_n\tilde{\tau}_{n-1}(x_{n-1}) + C_n. \quad (81)$$

Тогда $S_n = S_n^{(1)} + C_nS_{n-1}$, где

$$S_n^{(1)} = \sum_i \{A_n\tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] + B_n\}\tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] \times \\ \times \rho_{n-1}(s_i)\Delta x_{n-1}\left(s_i - \frac{1}{2}\right) = \sum_i \{A_n\tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] + B_n\} \times \\ \times \Delta[\sigma(s_i)\rho_{n-1}(s_i)].$$

Воспользовавшись суммированием по частям, получим

$$S_n^{(1)} = \{A_n\tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)] + B_n\}\sigma(s_i)\rho_{n-1}(s_i)\Big|_a^{b-n} - \\ - A_n\sum_i \sigma(s_i+1)\rho_{n-1}(s_i+1)\Delta\tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s_i)].$$

Так как подстановка равна нулю и

$$\frac{\Delta\tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)]}{\Delta x_{n-1}(s)} = \tilde{\tau}'_{n-1} = \text{const},$$

то

$$S_n^{(1)} = -A_n\tilde{\tau}'_{n-1}\sum_i \rho_n(s_i)\Delta x_n\left(s_i - \frac{1}{2}\right) = -A_n\tilde{\tau}'_{n-1}S_n.$$

Таким образом, $S_n = -A_n\tilde{\tau}'_{n-1}S_n + C_nS_{n-1}$, откуда

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{1 + A_n\tilde{\tau}'_{n-1}}{C_n}. \quad (82)$$

Для вычисления постоянной A_n достаточно сравнить коэффициенты при $x^2_{n-1}(s)$ в равенствах (80) и (81):

$$A_n = \frac{1}{2(\tilde{\tau}'_{n-1})^2}\left[\alpha\tilde{\sigma}''_{n-1} + 2(\alpha^2-1)\tilde{\tau}'_{n-1}\right].$$

Для вычисления C_n достаточно положить в (80), (81) $x_{n-1} = x^*_{n-1}$, где x^*_{n-1} — корень уравнения $\tilde{\tau}_{n-1}(x_{n-1}) = 0$. Отсюда получим $C_n = \alpha\tilde{\sigma}_{n-1}(x^*_{n-1})$. Так как

$$\tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s)] = \sigma(s) + \frac{1}{2}\tilde{\tau}_{n-1}[x_{n-1}(s)]\Delta x_{n-1}\left(s - \frac{1}{2}\right),$$

то $\tilde{\sigma}_{n-1}[x_{n-1}(s^*_n)] = \sigma(s^*_n)$, т. е. $C_n = \alpha\sigma(s^*_n)$, где $x_{n-1}(s^*_n) = x^*_{n-1}$.

Замечание. В случае конечных значений a, b граничные условия (75) в силу ограниченности величин $x(s)$ и $x(s-1/2)$ можно записать в более простом виде:

$$\sigma(a)\rho(a)=0, \quad \sigma(b)\rho(b)=0.$$

Если считать, что $\rho(s_i)\neq 0$ при $a\leqslant s_i\leqslant b-1$, то граничное условие при $s=a$ будет выполнено, если

$$\sigma(a)=0. \tag{83}$$

С другой стороны, в силу равенства

$$\sigma(s+1)\rho(s+1)=\rho(s)[\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-1/2)]$$

граничное условие при $\sigma(b)\rho(b)=0$ будет выполнено, если

$$[\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-1/2)]\,|_{s=b-1}=0. \tag{84}$$

6. Вычисление весовых функций. Получим явные выражения для весовых функций $\rho(s)$ в точках сетки $s_i=a+i$ $(i=0, 1, \ldots$ $\ldots, N-1)$. При этом ограничимся важными для приложений случаями, когда $\rho_k(s_i)\Delta x_k(s_i-1/2)>0$ при $a\leqslant s_i\leqslant b-k-1$, полиномы $\tilde{\sigma}(x)$, $\tilde{\tau}(x)$ имеют вещественные коэффициенты, а величины a, b имеют конечные значения. Для определения значений $\rho(s_i)$ перепишем уравнение (56) в виде

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)}=\frac{\sigma(s)+\tau(s)\,\Delta x(s-1/2)}{\sigma(s+1)}. \tag{85}$$

В дальнейшем будем считать, что величины $\Delta x_k(s_i-1/2)$ сохраняют знак при $a\leqslant s_i\leqslant b-k-1$ $(k=0, 1, \ldots)$. Поэтому для выполнения условия $\rho_k(s_i)\Delta x_k(s_i-1/2)>0$ достаточно потребовать сохранения знака величин $\rho_k(s_i)$. Это требование в силу (85), (59) будет выполнено, если

$$\sigma(s_i+1)>0, \quad \sigma(s_i)+\tau(s_i)\Delta x(s_i-1/2)>0,$$
$$a\leqslant s_i\leqslant b-2. \tag{85a}$$

1°. Получим сначала решение уравнения (85) для функции $x(s)=\cos 2\gamma s$. Так как $x(s)=x(-s)$, и, следовательно, $\Delta x(s-1/2)=-\Delta x(t-1/2)|_{t=-s}$, то в силу (22) имеем

$$\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-1/2)=\sigma(-s), \tag{86}$$

откуда

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)}=\frac{\sigma(-s)}{\sigma(s+1)}. \tag{87}$$

Так как $x(s)=\cos 2\gamma s=(q^{2s}+q^{-2s})/2$ при $q=e^{i\gamma}$, то, согласно (22)

$$\sigma(s)=Aq^{4s}+Bq^{2s}+C+Dq^{-2s}+Eq^{-4s}, \tag{88}$$

где A, B, C, D, E — некоторые постоянные. Поскольку полиномы $\tilde{\sigma}(x)$ и $\tilde{\tau}(x)$ имеют вещественные коэффициенты, то $C=C^*$, $D=B^*$, $E=A^*$ (* — знак комплексного сопряжения). Разложим

выражение (88) для $\sigma(s)$ на простейшие множители при $A \neq 0$. Если через $q^{2\delta_j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ обозначить корни уравнения

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + B^*z + A^* = 0, \tag{89}$$

то получим

$$\sigma(s) = Aq^{-4s} \prod_{j=1}^{4} \left(q^{2s} - q^{2\delta_j}\right).$$

Так как

$$q^{2s} - q^{2\delta_j} = q^{s+\delta_j}\left(q^{s-\delta_j} - q^{-(s-\delta_j)}\right),$$

то

$$\sigma(s) = F \prod_{j=1}^{4} \omega(s - \delta_j), \tag{90}$$

где F — некоторая постоянная, $\omega(s)$ определяется формулой (16) при $q_1 = q = e^{i\gamma}$, $q_2 = e^{-i\gamma}$. Поэтому в силу равенства $\omega(-s) = -\omega(s)$ уравнение (87) можно переписать в виде

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\prod_{j=1}^{4} \omega(s + \delta_j)}{\prod_{j=1}^{4} \omega(s + 1 - \delta_j)}. \tag{91}$$

Решение этого уравнения в точках $s_i = a + i$, удовлетворяющее условию нормировки $|\rho(a)| = 1$, имеет вид

$$\rho(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{4} \Omega(i, a + \delta_j)}{\prod_{j=1}^{4} \Omega(i, a + 1 - \delta_j)} \rho(a), \tag{92}$$

где

$$\rho(a) = \begin{cases} +1, & \Delta x(s_i - 1/2) > 0, \\ -1, & \Delta x(s_i - 1/2) < 0; \end{cases}$$

$$\Omega(i, t) = \prod_{k=0}^{i-1} \omega(k + t), \quad \Omega(0, t) = 1.$$

Рассмотрим возможные значения δ_j, являющиеся корнями уравнения $\sigma(\delta) = 0$, т. е. уравнения (89) при $z = e^{2i\gamma\delta}$. В соответствии с (83), (84), (86) можно положить $\delta_1 = a$, $\delta_2 = 1 - b$. Так как уравнение (89) наряду с корнем $z = z_j$ имеет корень $z = 1/z^*$ (что нетрудно проверить), то значения δ_j $(j = 3, 4)$ можно выбрать либо вещественными, либо комплексно сопряженными. Таким образом, возможны два случая:

1) $\delta_3 = c$, $\delta_4 = d$, где c, d — вещественные числа;
2) $\delta_3 = c + id$, $\delta_4 = c - id$, где c, d — вещественные числа.

В первом случае

$$\sigma(s) = \omega(s-a)\omega(s+b-1)\omega(s-c)\omega(d-s) \tag{93}$$

(мы выбрали в (90) нормировочную постоянную $F=1$),

$$\rho(s_i) = \frac{\Omega(i, 2a)\,\Omega(i, a+1-b)\,\Omega(i, a+c)\,\Omega(i, a+d)}{\Omega(i, 1)\,\Omega(i, a+b)\,\Omega(i, a+1-c)\,\Omega(i, a+1-d)}\,\rho(a), \tag{94}$$

где

$$\omega(s) = \frac{\sin\gamma s}{\sin\gamma}, \quad \Omega(i, t) = \prod_{k=0}^{i-1}\omega(k+t),$$

$$\rho(a) = \begin{cases} 1, & \Delta x(s_i - 1/2) > 0, \\ -1, & \Delta x(s_i - 1/2) < 0. \end{cases}$$

Соответствующие полиномы $\tilde{y}_n[x(s)]$ при $B_n = (-1)^n/n!$ в (64) будем обозначать $u_n^{(c,d)}(x)$, где $x = \cos 2\gamma s$. Ограничения на возможные значения параметров a, b, c, d можно получить из условий (85а) с учетом (86).

Во втором случае

$$\sigma(s) = \omega(s-a)\,\omega(s+b-1)\,\frac{\sin^2\gamma(s-c) + \operatorname{sh}^2\gamma d}{\sin^2\gamma}, \tag{95}$$

$$\rho(s_i) = \frac{\Omega(i, 2a)\,\Omega(i, a+1-b)\,\chi(i, a+c, d)}{\Omega(i, 1)\,\Omega(i, a+b)\,\chi(i, a+1-c, d)}, \tag{96}$$

где

$$\chi(i, \mu, \nu) = \prod_{k=0}^{i-1}\left[\frac{\sin^2\gamma(k+\mu) + \operatorname{sh}^2\gamma\nu}{\sin^2\gamma}\right].$$

Соответствующие полиномы при $B_n = (-1)^n/n!$ в (64) будем обозначать через $v_n^{(c,d)}(x)$, где $x = \cos 2\gamma s$.

Функции $\tilde{\sigma}[x(s)]$ и $\tilde{\tau}[x(s)] \equiv \tau(s)$ с помощью (22), (86) можно в обоих случаях выразить явным образом через $\sigma(s)$:

$$\tilde{\sigma}[x(s)] = [\sigma(s) + \sigma(-s)]/2, \tag{97}$$

$$\tilde{\tau}[x(s)] = \frac{\sigma(-s) - \sigma(s)}{\Delta x(s-1/2)}. \tag{98}$$

Нетрудно проверить, что при подстановке выражения (90) для $\sigma(s)$ в (97) и (98) мы действительно получаем полиномы соответствующих степеней от $x(s) = \cos 2\gamma s$. Так как

$$x_k(s) = x(s+k/2) = x(-s-k/2) = x_k(-s-k),$$

то из (38) вытекают формулы, аналогичные (97), (98):

$$\tilde{\sigma}_k[x_k(s)] = [\sigma(s) + \sigma(-s-k)]/2, \tag{97а}$$

$$\tilde{\tau}_k[x_k(s)] = \frac{\sigma(-s-k) - \sigma(s)}{\Delta x_k(s-1/2)}. \tag{98а}$$

Замечание 1. Если в разложении (88) $A=0$, то с помощью проведенных ранее рассуждений получим

$$\sigma(x)=F\prod_{j=1}^{2}\omega(s-\delta_j), \tag{99}$$

где δ_j — корни уравнения $\sigma(\delta)=0$. Как и ранее, следует положить $\delta_1=a$, $\delta_2=1-b$. При этом

$$\rho(s_i)=\frac{\Omega(i,\,2a)\,\Omega(i,\,a+1-b)}{\Omega(i,\,1)\,\Omega(i,\,a+b)}. \tag{100}$$

2°. Преобразуем теперь к более простому виду уравнение (85) для весовой функции $\rho(s)$ при $x(s)=\operatorname{ch}2\gamma s$ и $x(s)=\operatorname{sh}2\gamma s$, используя свойства симметрии функции $x(s)$. При $x(s)=\operatorname{ch}2\gamma s$ имеем

$$x(s)=x(-s),\quad \Delta x(s-1/2)=-\Delta x(t-1/2)\,|_{t=-s} \tag{101}$$

и, согласно (22),

$$\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-1/2)=\sigma(-s). \tag{102}$$

Поэтому уравнение для $\rho(s)$ принимает вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)}=\frac{\sigma(-s)}{\sigma(s+1)}. \tag{103}$$

Полиномы $\tilde{\sigma}[x(s)]$ и $\tilde{\tau}[x(s)]$ можно, согласно (22), (102), выразить через $\sigma(s)$ следующим образом:

$$\tilde{\sigma}[x(s)]=[\sigma(s)+\sigma(-s)]/2, \tag{104}$$

$$\tilde{\tau}[x(s)]=\frac{\sigma(-s)-\sigma(s)}{\Delta x(s-1/2)}. \tag{105}$$

Выражения для $\tilde{\sigma}_k[x_k(s)]$ и $\tilde{\tau}_k[x_k(s)]$ при $x(s)=\operatorname{ch}2\gamma s$, очевидно, совпадут с (97а) и (98а).

С помощью таких же рассуждений при $x(s)=\operatorname{sh}2\gamma s$ получим

$$x(s)=x(-s+i\pi/(2\gamma)),$$

$$\Delta x(s-1/2)=-\Delta x(t-1/2)\,|_{t=-s+i\pi/(2\gamma)},$$

$$\sigma(s)+\tau(s)\Delta x(s-1/2)=\sigma(-s+i\pi/(2\gamma)), \tag{106}$$

$$\tilde{\sigma}[x_k(s)]=[\sigma(s)+\sigma(-s-k+i\pi/(2\gamma))]/2, \tag{107}$$

$$\tilde{\tau}_k[x_k(s)]=\frac{\sigma(-s-k+i\pi/(2\gamma))-\sigma(s)}{\Delta x_k(s-1/2)}, \tag{108}$$

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)}=\frac{\sigma(-s+i\pi/(2\gamma))}{\sigma(s+1)}. \tag{109}$$

При $x(s)=\operatorname{ch}2\gamma s$ и $x(s)=\operatorname{sh}2\gamma s$ функция $\sigma(s)$ имеет вид

$$\sigma(s)=Aq^{4s}+Bq^{2s}+C+Dq^{-2s}+Eq^{-4s}=$$
$$=q^{-4s}(Aq^{8s}+Bq^{6s}+Cq^{4s}+Dq^{2s}+E), \tag{110}$$

где $q=e^{\gamma}$, A, B, C, D, E — вещественные постоянные. Поэтому

разложение $\sigma(s)$ на простейшие множители при $A \neq 0$ можно представить в виде

$$\sigma(s) = Aq^{-4s} \prod_{j=1}^{4} (q^{2s} - z_j), \tag{111}$$

где z_j — корень уравнения

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0. \tag{112}$$

Так как $q^{2s} - z_j = q^s(q^s - z_j q^{-s})$, то, согласно (111),

$$\sigma(s) = A \prod_{j=1}^{4} (e^{\gamma s} - z_j e^{-\gamma s}). \tag{113}$$

В результате при $x(s) = \operatorname{ch} 2\gamma s$ уравнение (103) для $\rho(s)$ примет вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\prod_{j=1}^{4} \omega_1(s, z_j)}{\prod_{j=1}^{4} \omega_2(s, z_j)}, \tag{114}$$

где

$$\omega_1(s, z) = ze^{\gamma s} - e^{-\gamma s}, \tag{115}$$

$$\omega_2(s, z) = e^{\gamma(s+1)} - ze^{-\gamma(s+1)}. \tag{116}$$

Аналогичным способом при $x(s) = \operatorname{sh} 2\gamma s$ приходим к уравнению вида (114) для $\rho(s)$, в котором

$$\omega_1(s, z) = ze^{\gamma s} + e^{-\gamma s}, \tag{117}$$

$$\omega_2(s, z) = e^{\gamma(s+1)} - ze^{-\gamma(s+1)}. \tag{118}$$

Решение уравнения (114) при $s = s_i = a + i$ $(a \geqslant 0)$ имеет вид

$$\rho(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{4} \Omega_1(i, z_j)}{\prod_{j=1}^{4} \Omega_2(i, z_j)}, \tag{119}$$

где

$$\Omega_1(i, z) = \prod_{k=0}^{i-1} \omega_1(a + i, z), \quad \Omega_1(0, z) = 1, \tag{120}$$

$$\Omega_2(i, z) = \prod_{k=0}^{i-1} \omega_2(a + i, z), \quad \Omega_2(0, z) = 1. \tag{121}$$

Рассмотрим возможные значения z_j. Так как, согласно (83), (84), (102), при $x(s) = \operatorname{ch} 2\gamma s$

$$\sigma(a) = 0, \quad \sigma(1 - b) = 0,$$

то в этом случае можно положить $z_1 = e^{2\gamma a}$, $z_2 = e^{2\gamma(1-b)}$. Аналогич-

но, с помощью (106) при $x(s) = \operatorname{sh} 2\gamma s$ получим

$$\sigma(a) = 0, \quad \sigma(1 - b + i\pi/(2\gamma)) = 0,$$

т. е. можно положить $z_1 = e^{2\gamma a}$, $z_2 = -e^{2\gamma(1-b)}$. Так как корни уравнения (112) либо вещественны, либо встречаются комплексно сопряженными парами, то для значений z_3, z_4 при $x(s) = \operatorname{ch} 2\gamma s$ и $x(s) = \operatorname{sh} 2\gamma s$ возможны два случая:

1) $z_3 = c$, $z_4 = d$, где c, d — вещественные числа;
2) $z_3 = c + id$, $z_4 = c - id$, где c, d — вещественные числа.

Полиномы $\tilde{y}_n[x(s)]$ для $x(s) = \operatorname{ch} 2\gamma s$ и $x(s) = \operatorname{sh} 2\gamma s$ при $B_n = (-1)^n/n!$ в формуле Родрига будем в первом случае обозначать $u_n^{(c,d)}(x)$, а во втором случае $v_n^{(c,d)}(x)$.

Замечание 2. Случаи, когда в разложении (113) $A = 0$ или $A = 0$, $B = 0$ рассматриваются аналогично.

3°. Рассмотрим теперь возможные виды функции $\rho(s)$ при $x(s) = e^{2\gamma s}$ и $x(s) = e^{-2\gamma s}$. В этих случаях функции $\sigma(x) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2)$ и $\sigma(s)$ можно представить в виде

$$\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2) = Ax^2(s) + Bx(s) + C,$$
$$\sigma(s) = A_1x^2(s) + B_1x(s) + C_1,$$

где A, B, C, A_1, B_1, C_1 — вещественные числа.

Если обозначить через x_1, x_2 корни уравнения

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

а через x_3, x_4 — корни уравнения

$$A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0,$$

то получим разложения

$$\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2) = A[x(s) - x_1][x(s) - x_2],$$
$$\sigma(s) = A_1[x(s) - x_3][x(s) - x_4].$$

Уравнение (85) для $\rho(s)$ принимает вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \varkappa \frac{[x(s) - x_1][x(s) - x_2]}{[x(s+1) - x_3][x(s+1) - x_4]}, \quad \varkappa = \frac{A}{A_1}.$$

Решение этого уравнения в точках $s = s_i$ можно записать в виде

$$\rho(s_1) = \varkappa^i \prod_{k=0}^{i-1} \frac{[x(a+k) - x_1][x(a+k) - x_2]}{[x(a+k+1) - x_3][x(a+k+1) - x_4]}, \quad \rho(a) = 1. \tag{122}$$

Так как $\sigma(a) = 0$, $[\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s - 1/2)]|_{s=b-1} = 0$, то можно положить $x_1 = x(a)$, $x_3 = x(b-1)$. Положим далее $x_2 = c$, $x_4 = d$, где c, d — вещественные числа. Соответствующие полиномы при $B_n = (-1)^n/n!$ будем обозначать $u_n^{(c,d)}(x)$.

4°. Нам осталось рассмотреть случай, когда $x(s) = s(s+1)$. Возникающие при этом полиномы $\tilde{y}_n(x)$ могут быть выражены через широко используемые в атомной физике коэффициенты

Рака и Клебша — Гордана. Поэтому этот случай будет исследован более подробно. Имеем

$$x(s) = x(-s-1), \quad \Delta x(s-1/2) = -\Delta x(t-1/2)|_{t=-s-1},$$

откуда, согласно (22),

$$\begin{gathered}\sigma(s) + \tau(s)\Delta x(s-1/2) = \sigma(-s-1),\\ \tilde{\sigma}[x(s)] = [\sigma(s) + \sigma(-s-1)]/2,\\ \tilde{\tau}[x(s)] = \frac{\sigma(-s-1) - \sigma(s)}{\Delta x(s-1/2)}.\end{gathered} \tag{123}$$

Уравнение для $\rho(s)$ принимает вид

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\sigma(-s-1)}{\sigma(s+1)}.$$

В рассматриваемом случае $\sigma(s)$ — полином четвертой степени относительно s и его разложение на простейшие множители имеет вид

$$\sigma(s) = A\prod_{j=1}^{4}(s-s_j). \tag{124}$$

В результате приходим к следующему уравнению для $\rho(s)$:

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{\prod_{j=1}^{4}(s+s_j)}{\prod_{j=1}^{4}(s+1-s_j)}. \tag{125}$$

Так как, согласно (83), (84), (123), $\sigma(a)=0$, $\sigma(-b)=0$, то можно положить $s_1=a$, $s_2=-b$. Для значений s_3, s_4 возможны два случая:

1) $s_3=c$, $s_4=d$, где c, d — вещественные числа;

2) $s_3=c+id$, $s_4=c-id$, где c, d — вещественные числа.

В первом случае

$$\sigma(s) = (s-a)(s+b)(s-c)(d-s) \tag{126}$$

(мы положим в (124) $A=-1$). В этом случае возможны следующие решения уравнения (125), для которых удовлетворяются условия положительности $\rho(s_i)$ и $\sigma(s_i)$:

а) $$\rho(s) = \frac{\Gamma(s+a+1)\,\Gamma(s+c+1)\,\Gamma(s+d+1)\,\Gamma(d-s)}{\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(s+b+1)\,\Gamma(b-s)\,\Gamma(s-c+1)}, \tag{127}$$

$$-1/2 < a < b < 1+d, \quad |c| < 1+a;$$

б) $$\rho(s) = \frac{\Gamma(s+a+1)}{\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(s+b+1)\,\Gamma(b-s)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(s+c+1)}{\Gamma(s-c+1)\,\Gamma(s-d+1)\,\Gamma(-d-s)}, \tag{128}$$

$$-1/2 < a < b < 1-d, \quad |c| < 1+a.$$

Полиномы $\tilde{y}_n(x)$ при $B_n=(-1)^n/n!$ и $B_n=1/n!$, соответствующие

весовым функциям (127) и (128), обозначим через $u_n^{(c,d)}(x)$ и $\tilde{u}_n^{(c,d)}(x)$. Будем называть эти полиномы *полиномами Рака.*

Во втором случае имеем

$$\sigma(s) = (s-a)(s+b)[(s-c)^2+d^2], \tag{129}$$

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{(s+1+a)(b-s-1)(s+1+c+id)(s+1+c-id)}{(s+1-a)(s+1+b)(s+1-c-id)(s+1-c+id)},$$

откуда

$$\rho(s) = \frac{\Gamma(s+1+a)\,|\Gamma(s+1+c+id)|^2}{\Gamma(s+1-a)\,\Gamma(s+1+b)\,\Gamma(b-s)\,|\Gamma(s+1-c+id)|^2}, \tag{130}$$

$$|a+b| < 1.$$

Соответствующие полиномы $\tilde{y}_n(x)$ при $B_n = (-1)^n/n!$ будем обозначать через $v_n^{(c,d)}(x)$.

При $x(s) = s(s+1)$ возможен также случай, когда функция $\sigma(s)$ является полиномом третьей степени. В этом случае

$$\sigma(s) = (s-a)(s+b)(s-c),$$

$$\frac{\rho(s+1)}{\rho(s)} = \frac{(s+1+a)(b-s-1)(s+1+c)}{(s+1-a)(s+1+b)(s+1-c)},$$

откуда

$$\rho(s) = \frac{\Gamma(s+a+1)\,\Gamma(s+c+1)}{\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(s+b+1)\,\Gamma(b-s)\,\Gamma(s-c+1)}, \tag{131}$$

$$-1/2 < a < b, \quad |c| < 1+a.$$

Соответствующие ортогональные полиномы при $B_n = (-1)^n/n!$ обозначим через $w_n^{(c)}(x)$. Сравнивая соотношения ортогональности и коэффициенты при старших степенях полиномов $w_n^{(c)}(x) \equiv w_n^{(c)}(x, a, b)$ и дуальных полиномов Хана $w_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, можно убедиться в том, что они совпадают при $a = (\alpha+\beta)/2$, $b = a+N$, $c = (\beta-\alpha)/2$, т. е. полиномы Хана и полиномы $w_n^{(c)}(x)$ связаны соотношением

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(i) =$$

$$= (-1)^{i+n}\frac{i!\,(N-i-1)!\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(N-n-1)!\,\Gamma(\beta+i+1)}\,w_i^{(\beta-\alpha)/2}\left(t_n, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\overline{\alpha+\beta}}{2}+N\right), \tag{131a}$$

$$t_n = s_n(s_n+1), \quad s_n = (\alpha+\beta)/2+n.$$

Разностное уравнение (3) было введено как обобщение дифференциального уравнения (1) для классических ортогональных полиномов. Поэтому естественно ожидать, что полиномиальные решения уравнения (3) $y(s) = \tilde{y}_n[x(s)]$ и весовые функции $\rho(s)$ при $h \to 0$ будут переходить в пределе при соответствующей нормировке в полиномиальные решения уравнения (1) и соответствующие им весовые функции.

Рассмотрим указанный предельный переход на примере полиномов Рака. Переход к пределу при $h \to 0$ в уравнении (3) соответствует $N = b - a \to \infty$ для полиномов Рака. Нетрудно доказать, что вес $\rho(s) \equiv \rho^{(c,d)}(s)$ для полиномов Рака $u_n^{(c,d)}[x(s)]$ при $N \to \infty$ в пределе переходит в вес $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$, где

$$t = 2\frac{x(s) - x(a)}{x(b) - x(a)} - 1, \quad \alpha = d - b, \quad \beta = a + c.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$\frac{\Gamma(z+\gamma)}{\Gamma(z+\delta)} \to z^{\gamma-\delta}, \qquad z \to \infty.$$

Действительно, при фиксированном значении $t \in (-1, 1)$ и $N \to \infty$ имеем

$$b = N + a \approx N,$$

$$1 + t = 2\frac{(s+1/2)^2 - (a+1/2)^2}{(b+1/2)^2 - (a+1/2)^2} \approx \frac{2}{N^2}s^2, \quad 1 - t \approx \frac{2}{N^2}(b^2 - s^2),$$

$$\frac{\Gamma(s+a+1)\,\Gamma(s+c+1)}{\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(s-c+1)} \approx s^{2(a+c)} = (s^2)^\beta \approx \left[\frac{N^2}{2}(1+t)\right]^\beta,$$

$$\frac{\Gamma(s+d+1)\,\Gamma(d-s)}{\Gamma(s+b+1)\,\Gamma(b-s)} \approx (s+b)^{d-b}(b-s)^{d-b} =$$

$$= (b^2 - s^2)^\alpha = \left[\frac{N^2}{2}(1-t)\right]^\alpha.$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{N^2}\right)^{\alpha+\beta}\rho^{(\beta-a,\,b+\alpha)}(s) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta. \tag{132}$$

Аналогичное предельное соотношение должно связывать полиномы Рака $u_n^{(c,d)}[x(s)]$ и полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$:

$$\lim_{N\to\infty} c_n(N)\,u_n^{(\beta-a,\,b+\alpha)}[x(s)] = P_n^{(\alpha,\beta)}(t). \tag{133}$$

Постоянную $c_n(N)$ легко найти, сравнивая коэффициенты при старших степенях в левой и правой частях (133): $c_n(N) = N^{-2n}$. В соответствии с (133) полиномы Рака $u_n^{(c,d)}(x)$ будем в дальнейшем обозначать $u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, полагая $\alpha = d - b$, $\beta = a + c$. Более подробно предельное соотношение вида (133) рассмотрено в п. 8.

7. Основные характеристики полиномов Рака и дуальных полиномов Хана. Получим основные характеристики для классических ортогональных полиномов дискретной переменной на неравномерных сетках на примере полиномов Рака $u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и дуальных полиномов Хана $w_n^{(c)}(x)$, считая функцию $\sigma(s)$ заданной. Для полиномов Рака

$$\sigma(s) = (s-a)(s+b)(s+a-\beta)(b+\alpha-s),$$

Согласно (123)

$$\tau(s) = \tilde{\tau}[x(s)] = \frac{\sigma(-s-1) - \sigma(s)}{\Delta x(s-1/2)} = (\alpha+1)(a-\beta)a +$$
$$+ (\beta+1)(b+\alpha)b - (\alpha+1)(\beta+1) - (\alpha+\beta+2)s(s+1). \quad (134)$$

В соответствии с (134) и (44) имеем

$$\tilde{\tau}(0) = (\alpha+1)(a-\beta)a + (\beta+1)(b+\alpha)b - (\alpha+1)(\beta+1),$$
$$\tilde{\tau}' = -(\alpha+\beta+2).$$

Аналогично, сравнивая коэффициенты при старших степенях в формуле (123) для $\tilde{\sigma}[x(s)]$, найдем величины $\tilde{\sigma}(0)$, $\tilde{\sigma}'(0)$, $\tilde{\sigma}''$. С помощью найденных значений $\tilde{\tau}(0)$, $\tilde{\tau}'$, $\tilde{\sigma}'(0)$, $\tilde{\sigma}''$ можно вычислить по формулам (66), (66а), (74) постоянные A_n, A_{kn}, a_n, b_n, если воспользоваться формулами (50), (51) для $\tilde{\tau}_{n-1}(0)$, $\tilde{\tau}'_{n-1}$. Для определения квадрата нормы d_n^2 необходимо сначала найти значение $x^*_{n-1} = -\tilde{\tau}_{n-1}(0)/\tilde{\tau}'_{n-1}$, для которого $\tilde{\tau}_{n-1}(x^*_{n-1}) = 0$, а затем воспользоваться формулами (78), (79а), (82).

Подобным же образом вычисляются основные характеристики для дуальных полиномов Хана. Результаты вычислений основных характеристик полиномов Рака и дуальных полиномов Хана приведены в табл. 3г, 3д. В этих таблицах приведены также и коэффициенты рекуррентных соотношений

$$x\tilde{y}_n(x) = \alpha_n\tilde{y}_{n+1}(x) + \beta_n\tilde{y}_n(x) + \gamma_n\tilde{y}_{n-1}(x) \quad (135)$$

для этих полиномов.

В заключение рассмотрим разностные производные полиномов Рака и дуальных полиномов Хана. Используя (67), для полиномов Рака $u_n^{(\alpha,\beta)}(x) \equiv u_n^{(\alpha,\beta)}(x, a, b)$ и дуальных полиномов Хана $w_n^{(c)}(x) \equiv w_n^{(c)}(x, a, b)$ получаем

$$\frac{\Delta u_n^{(\alpha,\beta)}[x(s), a, b]}{\Delta x(s)} =$$
$$= (\alpha+\beta+n+1)\, u_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\left[x\left(s+\frac{1}{2}\right), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2}\right],$$
$$\frac{\Delta w_n^{(c)}[x(s), a, b]}{\Delta x(s)} = w_{n-1}^{(c-1/2)}\left[x\left(s+\frac{1}{2}\right), a+\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2}\right].$$

8. Асимптотические свойства. Оказывается, что между полиномами Рака $u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ существует асимптотическая формула более высокого порядка точности, чем (133). Выберем зависимость между аргументами этих полиномов в виде

$$x = s(s+1) = -\frac{1}{4} + \left(a - \frac{\beta}{2}\right)^2 \frac{1-t}{2} + \left(b + \frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{1+t}{2} \quad (136)$$

и рассмотрим полиномы $p_n(t) = C_n u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, где $C_n = \tilde{N}_n^{-1/2}$,

Таблица 3г

Основные характеристики полиномов Рака $u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

$\tilde{\nu}_n(x)$	$u_n^{(\alpha,\beta)}[x(s)],\ x(s)=s(s+1)$
(a, b)	(a, b)
$\rho(s)$	$\dfrac{\Gamma(a+s+1)\,\Gamma(s-a+\beta+1)\,\Gamma(b+\alpha-s)\,\Gamma(b+\alpha+s+1)}{\Gamma(a-\beta+s+1)\,\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(b-s)\,\Gamma(b+s+1)}$ $(-1/2<a\leqslant b-1,\ \alpha>-1,\ -1<\beta<2a+1)$
$\sigma(s)$	$(s-a)(s+b)(s+a-\beta)(b+\alpha-s)$
$\tau(s)$	$(\alpha+1)\,a(a-\beta)+(\beta+1)\,b(b+\alpha)-$ $-(\alpha+1)(\beta+1)-(\alpha+\beta+2)\,x(s)$
λ_n	$n(\alpha+\beta+n+1)$
B_n	$(-1)^n/n!$
$\rho_n(s)$	$\dfrac{\Gamma(a+s+n+1)\,\Gamma(s-a+\beta+n+1)\,\Gamma(b+\alpha-s)\,\Gamma(b+\alpha+s+n+1)}{\Gamma(a-\beta+s+1)\,\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(b-s-n)\,\Gamma(b+s+1)}$
a_n	$(\alpha+\beta+n+1)_n/n!$
b_n	$-\dfrac{(\alpha+\beta+n+1)_{n-1}}{(n-1)!}\Big[(\alpha+n)\,a^2+(\beta+n)\,b^2+\alpha\beta\,(b-a-n)+$ $+(\alpha b-\beta a)\,n-\dfrac{1}{3}(2n^2+1)(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{3}n(n^2+2)\Big]$
d_n^2	$\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(b-a+\alpha+\beta+n+1)\,\Gamma(a+b+\alpha+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,(b-a-n-1)!\,\Gamma(a+b-\beta-n)}$
α_n	$\dfrac{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}$
β_n	$\dfrac{1}{4}[a^2+b^2+(a-\beta)^2+(b+\alpha)^2-2]-$ $-\dfrac{1}{8}(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)+\dfrac{(\beta^2-\alpha^2)\left[\left(b+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(a-\frac{\beta}{2}\right)^2\right]}{2(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$
γ_n	$\dfrac{(\alpha+n)(\beta+n)(b-a+\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)}\times$ $\times\dfrac{(b-a-n)(a+b+\alpha+n)(a+b-\beta-n)}{(\alpha+\beta+2n+1)}$

$\tilde{N}^2=(b+\alpha/2)^2-(a-\beta/2)^2$. Покажем, что при $b-a=N\to\infty$ справедливо соотношение

$$p_n(t)=P_n^{(\alpha,\beta)}(t)+O(1/N^2). \tag{137}$$

Таблица 3д

Основные характеристики дуальных полиномов Хана $w_n^{(c)}(x)$

$\tilde{y}_n(x)$	$w_n^{(c)}[x(s)]$, $x(s) = s(s+1)$
(a, b)	(a, b)
$\rho(s)$	$\dfrac{\Gamma(a+s+1)\,\Gamma(c+s+1)}{\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(b-s)\,\Gamma(b+s+1)\,\Gamma(s-c+1)}$
	$(-1/2 < a \leqslant b-1,\ \lvert c\rvert < a+1)$
$\sigma(s)$	$(s-a)(s+b)(s-c)$
$\tau(s)$	$ab - ac + bc - a + b - c - 1 - x(s)$
λ_n	n
B_n	$(-1)^n/n!$
$\rho_n(s)$	$\dfrac{\Gamma(a+s+n+1)\,\Gamma(c+s+n+1)}{\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(b-s-n)\,\Gamma(b+s+1)\,\Gamma(s-c+1)}$
a_n	$1/n!$
b_n	$-\dfrac{1}{(n-1)!}\left[ab - ac + bc - \dfrac{1}{3} + (b-a-c)\,n - \dfrac{2}{3}\,n^2\right]$
d_n^2	$\dfrac{\Gamma(a+c+n+1)}{n!\,(b-a-n-1)!\,\Gamma(b-c-n)}$
α_n	$n+1$
β_n	$ab - ac + bc + (b-a-c-1)(2n+1) - 2n^2$
γ_n	$(a+c+n)(b-a-n)(b-c-n)$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{4}\left[a^2 + b^2 + (a-\beta)^2 + (b+\alpha)^2 - 2\right] - \frac{1}{8}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+2) =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\left(a - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{\alpha}{2}\right)^2\right] - \frac{1}{4}(\alpha+1)(\beta+1). \quad (138)$$

Тогда рекуррентные соотношения для полиномов $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ и $p_n(t)$ можно переписать в виде (см. табл. 2)

$$tP_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \alpha_n P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t) + \beta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(t) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t), \quad (139)$$

$$tp_n = \alpha_n p_{n+1} + \left[\beta_n - \frac{(\alpha+1)(\beta+1) + 2n(\alpha+\beta+n+1)}{2\tilde{N}^2}\right] p_n +$$

$$+ \gamma_n \left[1 - \frac{(n+(\alpha+\beta)/2)^2}{(b+a+(\alpha-\beta)/2)^2}\right]\left[1 - \frac{(n+(\alpha+\beta)/2)^2}{(b-a+(\alpha+\beta)/2)^2}\right] p_{n-1}. \quad (140)$$

При $b-a=N\to\infty$ коэффициенты соотношения (140) отличаются от коэффициентов соотношения (139) на величины порядка $O(\widetilde{N}^{-2})$. Так как

$$p_0(t)=P_0^{(\alpha,\beta)}(t),\quad p_1(t)=P_1^{(\alpha,\beta)}(t)+O(\widetilde{N}^{-2}),$$

то по индукции получаем искомую асимптотическую формулу (137), т. е.

$$u_n^{(\alpha,\beta)}(x,a,b)=\widetilde{N}^{2n}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(t)+O(\widetilde{N}^{-2})\right],\quad b-a=N\to\infty, \tag{141}$$

где

$$x=-\frac{1}{4}+\left(a-\frac{\beta}{2}\right)^2\frac{1-t}{2}+\left(b+\frac{\alpha}{2}\right)^2\frac{1+t}{2},$$

$$\widetilde{N}^2=\left(b+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(a-\frac{\beta}{2}\right)^2.$$

При тех же условиях с помощью асимптотического представления

$$\frac{\Gamma(s+a+1)}{\Gamma(s-a)}=s^{2a+1}[1+O(s^2)],\qquad s\to\infty,$$

для веса $\rho(s)$ и квадрата нормы d_n^2 полиномов $u_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ находим

$$\rho(s)=(\widetilde{N}^2/2)^{\alpha+\beta}(1-t)^\alpha(1+t)^\alpha\left[1+O(\widetilde{N}^{-2})\right],$$

$$d_n^2=(\widetilde{N}^2)^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\left[1+O(\widetilde{N}^{-2})\right].$$

Аналогичным образом для дуальных полиномов Хана при $b\to\infty$ можно получить асимптотическую формулу

$$\frac{(-1)^n}{b^n}w_n^{(\alpha-a)}(x)=L_n^\alpha(t)+O\left(\frac{1}{b}\right), \tag{142}$$

где $x=a(\alpha-a)+(b-1)t$.

9. Построение некоторых классов неравномерных сеток с помощью формулы Дарбу — Кристоффеля. Мы рассмотрели классы сеток, для которых удается построить достаточно простую теорию ортогональных полиномов дискретной переменной с помощью обобщения теории классических ортогональных полиномов. Рассмотрим теперь еще один способ построения сеток для ортогональных полиномов дискретной переменной на основе формулы Дарбу — Кристоффеля. Пусть $\{p_n(x)\}$ — произвольная система ортогональных полиномов, для которой свойство ортогональности определяется либо с помощью интеграла от произведения полиномов с некоторым весом $\rho(x)$, либо с помощью соответствующей суммы. Для таких полиномов ранее была получена

формула Дарбу — Кристоффеля

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n(x)\,p_n(y)}{d_n^2} = \frac{a_{N-1}}{a_N} \cdot \frac{1}{d_{N-1}^2} \cdot \frac{p_N(x)\,p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x)\,p_N(y)}{x-y}. \qquad (143)$$

Здесь d_n^2 — квадрат нормы, a_n — коэффициент при старшей степени полинома $p_n(x)$.

Покажем, что с помощью этой формулы легко указать сетку $\{x_i\}$ и найти вес $\bar{\rho}(x_i)$, с которым полиномы $p_n(x)$ будут ортогональны:

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_m(x_i)\,p_n(x_i)\,\bar{\rho}(x_i) = d_n^2 \delta_{mn}. \qquad (144)$$

Действительно, пусть x_i — корни полинома $p_N(x)$, т. е. $p_N(x_i) = 0$. Тогда, полагая в (143) $x = x_i$, $y = x_j$, получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n(x_i)\,p_n(x_j)}{d_n^2} = D_i^2 \delta_{ij}, \qquad (145)$$

где

$$D_i^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n^2(x_i)}{d_n^2} = \frac{a_{N-1}}{a_N d_{N-1}^2}\, p_N'(x_i)\,p_{N-1}(x_i).$$

Соотношение (145) удобно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_{ni} c_{nj} = \delta_{ij}, \qquad (146)$$

где $c_{ni} = p_n(x_i)/(d_n D_i)$. Из (146) вытекает, что матрица C с элементами c_{ni} $(n, i = 0, 1, \ldots, N-1)$ является унитарной, и поэтому для матрицы C справедливо также другое соотношение ортогональности:

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_{mi} c_{ni} = \delta_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (147)$$

Соотношение (147), очевидно, эквивалентно соотношению ортогональности (144) для полиномов $p_n(x)$ при $\bar{\rho}(x_i) = 1/D_i^2$.

Мы рассмотрели способ построения соотношения ортогональности вида (144) для полиномов $p_n(x)$ в случае, когда сетка $\{x_i\}$ определяется с помощью уравнения $p_N(x_i) = 0$. Все рассуждения сохраняют силу, если сетка $\{x_i\}$ определяется с помощью более общего уравнения $\alpha p_N(x_i) + \beta p_{N-1}(x_i) = 0$, где α, β — не равные одновременно нулю вещественные коэффициенты.

В качестве примера рассмотрим соотношение ортогональности вида (144) для полиномов Чебышева первого рода $T_n(x) =$

$= \cos(n \arccos x)$. В этом случае

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad d_n^2 = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \pi/2, & n \neq 0, \end{cases}$$

$$T_N(x_i) = 0, \quad x_i = \cos\frac{\pi}{N}\left(i + \frac{1}{2}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

откуда

$$D_i^2 = \frac{4}{\pi} T'_N(x_i) T_{N-1}(x_i) = \frac{4N}{\pi}.$$

Поэтому (144) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{N-1} T_m[x(s_i)] T_n[x(s_i)] \frac{\pi}{4N} = d_n^2 \delta_{mn}, \tag{148}$$

где $x(s) = \cos \pi s/N$, $s_i = i + 1/2$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Сетка $\{x_i = \cos \pi s_i/N\}$ является частным случаем сетки (11) при $\gamma = \pi/(2N)$. Поэтому естественно ожидать, что полиномы Чебышева $T_n(x)$ совпадают с точностью до нормировочного множителя с полиномами $u_n^{(c,d)}[x(s)]$ при $x(s) = \cos 2\gamma s$, $\gamma = \pi/(2N)$, $a = 1/2$, $b = N + 1/2$ и некоторых значениях c, d. Из сопоставления равенств (148) и (76) видно, что это будет иметь место, если

$$\rho(s_i)\Delta x(s_i - 1/2) = \text{const}, \tag{149}$$

где $\rho(s)$ определяется формулой (94).

Проверим, что условие (149) выполняется при $a = 1/2$, $b = N + 1/2$, $c = 0$, $d = N$. Действительно, согласно (94), имеем

$$\rho(s_i) = -\frac{\Omega(i, 1-N)\,\Omega(i, 1/2)\,\Omega(i, 1/2+N)}{\Omega(i, 1+N)\,\Omega(i, 3/2)\,\Omega(i, 3/2-N)},$$

где

$$\Omega(i, t) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\sin \pi(k+t)/(2N)}{\sin \pi/(2N)}.$$

Так как

$$\frac{\Omega(i, t)}{\Omega(i, t+1)} = \frac{\sin \pi t/(2N)}{\sin \pi(t+i)/(2N)},$$

$$\frac{\Omega(i, t-N)}{\Omega(i, t+N)} = (-1)^i,$$

$$\frac{\Omega(i, 1/2+N)}{\Omega(i, 3/2-N)} = \frac{\Omega(i, 3/2+N)\,\Omega(i, 1/2+N)}{\Omega(i, 3/2-N)\,\Omega(i, 3/2+N)} = (-1)^i \frac{\cos \pi/(4N)}{\cos \pi s_i/(2N)},$$

$$\Delta x(s_i - 1/2) = -2 \sin \pi/(2N) \sin \pi s_i/N,$$

то получаем

$$\rho(s_i)\Delta x(s_i - 1/2) = 2 \sin^2 \pi/(2N) \neq \text{const}.$$

Таким образом,

$$T_n(x) = A_n u_n^{(0,N)}(x) \tag{150}$$

при $x = x(s) = \cos 2\gamma s$, $\gamma = \pi/(2N)$, $a = 1/2$, $b = N + 1/2$. Постоянную A_n можно найти, если приравнять коэффициенты при старших степенях в (150).