ГЛАВА III

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 14. Дифференциальное уравнение Бесселя и его решение

1. Решение уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. Цилиндрические функции широко используются в математической физике. Характерными задачами, приводящими к цилиндрическим функциям, являются задачи, связанные с решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

в цилиндрических координатах. Рассмотрим наиболее простой случай, когда функция v не зависит от расстояний вдоль оси цилиндра. Тогда $v = v(r, \varphi)$ и

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0. \tag{1}$$

Для однозначности функции v мы должны потребовать, чтобы она удовлетворяла условию периодичности $v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi)$. Разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r)\, e^{in\varphi},$$

где

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi)\, e^{-in\varphi} d\varphi. \tag{2}$$

Для функции $v_n(r)$ легко получить дифференциальное уравнение, если проинтегрировать на интервале $(-\pi, \pi)$ с весом $e^{-in\varphi}$ уравнение (1) и упростить член, содержащий $\partial^2 v/\partial\varphi^2$, с помощью двукратного интегрирования по частям. В силу периодичности функции $v(r, \varphi)$ по переменной φ подстановки обращаются в нуль, и мы приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции $u(z) = v_n(r)$ при $z = \sqrt{\lambda} r$:

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - n^2)u = 0.$$

В дальнейшем мы будем изучать уравнение несколько более общего вида

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0, \tag{3}$$

где z — комплексная переменная, ν — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Решения уравнения (3) называются *цилиндрическими функциями порядка* ν или *функциями Бесселя*, а уравнение (3) называется *уравнением Бесселя.*

Из уравнения Бесселя при помощи замены переменных можно получить ряд других дифференциальных уравнений, в частности широко используемое в приложениях *уравнение Ломмеля*

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{\xi}v' + \left[(\beta\gamma\xi^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{\xi^2}\right]v = 0, \tag{4}$$

решение которого имеет вид

$$v(\xi) = \xi^\alpha u_\nu(\beta\xi^\gamma).$$

Здесь $u_\nu(z)$ — цилиндрическая функция порядка ν; α, β, γ — постоянные.

2. Определение функций Бесселя первого рода и функций Ханкеля. Уравнение Бесселя (3) является частным случаем обобщенного уравнения гипергеометрического типа (1.1), когда $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. При приведении уравнения (3) к уравнению гипергеометрического типа в соответствии с выбором различных знаков в формуле (1.11) для $\pi(z)$ и выбором различных значений k возможны, как было показано в § 1 (см. пример), следующие виды функции $\varphi(z)$: $\varphi(z) = z^{\pm\nu}e^{\pm iz}$. Рассмотрим, например, $\varphi(z) = z^\nu e^{iz}$. Полагая $u(z) = \varphi(z)y(z)$, приходим к уравнению гипергеометрического типа (2.1), для которого

$$\sigma(z) = z, \quad \tau(z) = 2iz + 2\nu + 1, \quad \lambda = i(2\nu + 1).$$

По теореме 1 из § 3 получаем частное решение этого уравнения в виде

$$y(z) = \frac{C_\mu}{\rho(z)}\int_C \frac{\sigma^\mu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}}ds.$$

Здесь C_μ — нормировочная постоянная, $\rho(z)$ — решение дифференциального уравнения

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z),$$

μ — корень уравнения

$$\lambda + \mu\tau' + \frac{1}{2}\mu(\mu-1)\sigma'' = 0$$

(мы воспользовались формулами (3.2), (3.3), в которых во избежание путаницы ν заменили на μ, так как обозначение ν уже было использовано в исходном уравнении Бесселя).

Контур C выбирается из условия

$$\left.\frac{\sigma^{\mu+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu+2}}\right|_{s=s_1,s_2}=0.$$

В рассматриваемом случае

$$\mu=-\nu-1/2, \quad \rho(z)=z^{2\nu}e^{2iz}.$$

Поэтому частное решение уравнения Бесселя можно записать в виде

$$u_\nu(z)=\varphi(z)\,y(z)=a_\nu z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_C[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds, \tag{5}$$

где a_ν — нормировочная постоянная, а контур C выбирается из условия

$$s^{\nu+1/2}(z-s)^{\nu-3/2}e^{2is}\Big|_{s=s_1,s_2}=0.$$

Пусть $z>0$, $\operatorname{Re}\nu>3/2$. Тогда в качестве концов контура можно выбрать точки $s_1=0$, $s_2=z$. Кроме того, контур C может уходить в бесконечность таким образом, что $\operatorname{Im}s\to+\infty$. В качестве C выберем контуры C_0, C_1, C_2 вида, указанного на рис. 6. В результате приходим к следующим решениям уравнения Бесселя:

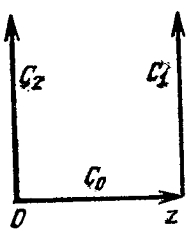

Рис. 6.

$$u_\nu^{(0)}(z)=a_\nu z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_{C_0}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds, \tag{6}$$

$$u_\nu^{(1)}(z)=a_\nu^{(1)}z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_{C_1}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds, \tag{7}$$

$$u_\nu^{(2)}(z)=a_\nu^{(2)}z^{-\nu}e^{-iz}\int\limits_{C_2}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds. \tag{8}$$

Для однозначного выбора ветви функции $[s(z-s)]^{\nu-1/2}$ будем считать $|\arg s(z-s)|<\pi$. Параметрическое представление контуров C_0, C_1, C_2 удобно взять в виде

$$\begin{aligned}
&s=z(1+t)/2, && -1\leqslant t\leqslant 1,\\
&s=z(1+it/2), && 0\leqslant t<\infty,\\
&s=izt/2, && 0\leqslant t<\infty.
\end{aligned}$$

Тогда формулы (6)—(8) примут вид

$$u_\nu^{(0)}(z)=\frac{a_\nu}{2^{2\nu}}z^\nu\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}e^{izt}dt=$$

$$=\frac{a_\nu}{2^{2\nu}}z^\nu\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos zt\,dt, \tag{9}$$

$$u_\nu^{(1)}(z) = -\frac{a_\nu^{(1)}}{\sqrt{2}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \exp\left\{i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt, \quad (10)$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = \frac{a_\nu^{(2)}}{\sqrt{2}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \exp\left\{-i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt. \quad (11)$$

В соответствии с условием $|\arg s(z-s)| < \pi$ в формулах (10), (11) значение $\arg(1 \pm it/2)$ берется наименьшим по модулю.

Если выбрать нормировочные постоянные вещественными, причем $a_\nu^{(2)} = -a_\nu^{(1)}$, то из (10) и (11) видно, что при вещественных z и ν функции $u_\nu^{(1)}(z)$ и $u_\nu^{(2)}(z)$ будут комплексно сопряженными. Удобно ввести функцию, принимающую вещественные значения при вещественных z, ν:

$$u_\nu(z) = \left[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)\right]/2. \quad (12)$$

Докажем, что эта функция будет совпадать с $u_\nu^{(0)}(z)$, если положить

$$a_\nu^{(2)} = -a_\nu^{(1)} = 2a_\nu. \quad (13)$$

Для доказательства достаточно применить теорему Коши к контуру C, являющемуся объединением контуров C_0, C_1, C_2 (см. рис. 6). Если замкнуть этот контур на бесконечности, то, согласно теореме Коши,

$$\int_C [s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds = -\int_{C_2}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds +$$

$$+\int_{C_0}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds + \int_{C_1}[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}ds = 0$$

(интеграл по бесконечно удаленной части контура обращается в нуль). Полученное соотношение с учетом (13) и (6)—(8) приводит к равенству

$$u_\nu^{(0)}(z) = \left[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)\right]/2. \quad (14)$$

Функцию $u_\nu^{(0)}(z)$ при определенном выборе постоянной a_ν называют *функцией Бесселя первого рода* и обозначают $J_\nu(z)$, а функции $u_\nu^{(1)}(z)$, $u_\nu^{(2)}(z)$ при нормировке (13) называют соответственно *функциями Ханкеля первого* и *второго рода* и обозначают $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Эти функции связаны между собой, согласно (14), следующим образом:

$$J_\nu(z) = \left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right]/2. \quad (15)$$

Интегральные представления (9)—(11) удобны для изучения различных свойств цилиндрических функций: интегральное представление для $J_\nu(z)$ позволяет, например, легко получить разложение этой функции в ряд по степеням z, а интегральные представления для функций Ханкеля удобны для получения асимптотического поведения этих функций при $z \to \infty$.

Чтобы получить разложение функции $J_\nu(z)$ в степенной ряд, подставим в (9) разложение $\cos zt$ в ряд по степеням zt и переставим порядок суммирования и интегрирования. В результате получим

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k} dt.$$

Упростим выражение для коэффициентов ряда:

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k} dt = 2\int_{0}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k} dt =$$

$$= \int_{0}^{1} (1-t)^{\nu-1/2} t^{k-1/2} dt = \frac{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu+k+1)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}\,(2k)!}{2^{2k} k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Мы воспользовались четностью подынтегрального выражения, связью бета- и гамма-функций, а также формулой удвоения для гамма-функции (см. Дополнение А). Таким образом,

$$J_\nu(z) = \frac{a_\nu}{2^\nu} \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Чтобы ряд для $J_\nu(z)$ имел более простой вид, нормировочную постоянную a_ν выберем из условия

$$\frac{a_\nu}{2^\nu} \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = 1. \tag{16}$$

В результате получим

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{17}$$

Используя выражение (16) для a_ν, перепишем (9)—(11) в виде

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt\, dt, \tag{18}$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z^\nu \exp\{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt, \tag{19}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z^\nu \exp\{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt. \tag{20}$$

Полученные интегральные представления для цилиндрических функций называют *представлениями Пуассона.*

Наряду с интегральными представлениями (19), (20) для функций Ханкеля используются также интегральные представления, получающиеся из (19), (20) заменой t на t/z:

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\exp\{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt, \tag{19a}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\exp\{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt. \tag{20a}$$

§ 15. Основные свойства цилиндрических функций

1. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для цилиндрических функций можно вывести методом, изложенным в § 4, если воспользоваться исходным интегральным представлением (14.5) для этих функций.

В качестве примера получим соотношение вида

$$A_1(z)u_\nu'(z)+A_2(z)u_\nu(z)+A_3(z)u_{\nu-1}(z)=0, \tag{1}$$

в котором коэффициенты $A_i(z)$ являются рациональными функциями z. Имеем

$$A_1(z)u_\nu'(z)+A_2(z)u_\nu(z)+A_3(z)u_{\nu-1}(z)=$$
$$=e^{-iz}z^{-\nu-1}\int_C P(s)\,[s(z-s)]^{\nu-3/2}e^{2is}ds,$$

где

$$P(s)=A_1a_\nu[(-\nu-iz)s(z-s)+(\nu-1/2)zs]+$$
$$+A_2a_\nu zs(z-s)+A_3z^2a_{\nu-1},$$