$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z^\nu \exp\{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt, \tag{19}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z^\nu \exp\{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt. \tag{20}$$

Полученные интегральные представления для цилиндрических функций называют *представлениями Пуассона.*

Наряду с интегральными представлениями (19), (20) для функций Ханкеля используются также интегральные представления, получающиеся из (19), (20) заменой t на t/z:

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\exp\{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt, \tag{19a}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{\exp\{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt. \tag{20a}$$

§ 15. Основные свойства цилиндрических функций

1. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для цилиндрических функций можно вывести методом, изложенным в § 4, если воспользоваться исходным интегральным представлением (14.5) для этих функций.

В качестве примера получим соотношение вида

$$A_1(z)u_\nu'(z)+A_2(z)u_\nu(z)+A_3(z)u_{\nu-1}(z)=0, \tag{1}$$

в котором коэффициенты $A_i(z)$ являются рациональными функциями z. Имеем

$$A_1(z)u_\nu'(z)+A_2(z)u_\nu(z)+A_3(z)u_{\nu-1}(z)=$$
$$=e^{-iz}z^{-\nu-1}\int\limits_C P(s)\,[s(z-s)]^{\nu-3/2}e^{2is}ds,$$

где

$$P(s)=A_1a_\nu[(-\nu-iz)s(z-s)+(\nu-1/2)zs]+$$
$$+A_2a_\nu zs(z-s)+A_3z^2a_{\nu-1},$$

Чтобы выполнялось (1), коэффициенты $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$ должны выбираться из условия

$$P(s)[s(z-s)]^{\nu-3/2}e^{2is} = \frac{d}{ds}\{Q(s)[s(z-s)]^{\nu-1/2}e^{2is}\},$$

где $Q(s)$ — полином. Как показано в § 4, один из коэффициентов полинома $Q(s)$ можно выбрать произвольно. В нашем случае полином $Q(s)$ имеет нулевую степень и можно положить $Q(s)=a_\nu$. Подставляя выражения для $P(s)$ и $Q(s)$, приходим к равенству

$$A_1[(-\nu-iz)s(z-s)+(\nu-1/2)zs]+A_2zs(z-s)+ \\ +A_3z^2a_{\nu-1}/a_\nu = 2is(z-s)+(\nu-1/2)(z-2s).$$

Если воспользоваться выражениями для нормировочных постоянных a_ν, соответствующих функциям $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1,2)}(z)$, то получим $a_{\nu-1}/a_\nu=(\nu-1/2)/2$. Равенство для определения коэффициентов A_i справедливо при любых значениях s. Поэтому коэффициенты A_i можно найти, полагая в нем переменную s равной некоторым частным значениям. Полагая, например, $s=0$, получим $A_3=2/z$. Значение $s=z$ дает $A_1=-2/z$. Приравнивая коэффициенты при старшей степени s, находим $A_2=-2\nu/z^2$. Подразумевая под $u_\nu(z)$ одну из функций, $J_\nu(z)$ или $H_\nu^{(1,2)}(z)$, окончательно получим следующее соотношение:

$$\frac{\nu}{z}u_\nu(z)+u_\nu'(z)=u_{\nu-1}(z). \tag{2}$$

Тем же методом можно было бы получить рекуррентное соотношение, связывающее функции $u_\nu(z)$, $u_{\nu-1}(z)$, $u_{\nu-2}(z)$. Однако такое соотношение легче вывести, дифференцируя (2) и исключая в полученном равенстве функции $u_\nu''(z)$, $u_\nu'(z)$, $u_{\nu-1}'(z)$ с помощью уравнения Бесселя и соотношения (2). В результате получим

$$u_\nu(z)-\frac{2(\nu-1)}{z}u_{\nu-1}(z)+u_{\nu-2}(z)=0. \tag{3}$$

Равенства (2), (3) можно заменить эквивалентными им соотношениями

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^\nu u_\nu(z)]=z^{\nu-1}u_{\nu-1}(z),$$

$$-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-\nu}u_\nu(z)]=z^{-(\nu+1)}u_{\nu+1}(z).$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^\nu u_\nu(z)]=z^{\nu-n}u_{\nu-n}(z),\\ \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^{-\nu}u_\nu(z)]=z^{-(\nu+n)}u_{\nu+n}(z).\end{gathered} \tag{4}$$

2. Аналитическое продолжение и асимптотические представления. Функции $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ были введены нами для вещественных значений $z>0$ и $\operatorname{Re}\nu>3/2$. Пусть теперь комплексная переменная z принадлежит плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, т. е. $|\arg z| < \pi$. Это ограничение необходимо для однозначности функции z^ν, когда ν — нецелое число. С помощью интегральных представлений (14.18)—(14.20) можно получить аналитическое продолжение функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$ на более широкую область изменения переменных z, ν.

Интеграл для $J_\nu(z)$ сходится равномерно по z и ν, когда $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2 + \delta$, $|z| \leqslant R$ (δ, R — произвольные положительные числа) в силу оценки

$$|(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos zt| \leqslant e^R(1-t^2)^{\delta-1}$$

и сходимости интеграла $\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\delta-1}dt$. Поэтому по теореме 2 из § 3 функция $J_\nu(z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных z, ν при $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re}\nu > -1/2$.

Интегралы

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{\nu-1/2}\left(1 \pm \frac{it}{2}\right)^{\nu-1/2}dt$$

для $H_\nu^{(1,2)}(z)$ являются интегралами Лапласа

$$F(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt,$$

для которых $f(t) = t^{\nu-1/2}(1 \pm it/2)^{\nu-1/2}$. Аналитическое продолжение и асимптотическое представление для интегралов Лапласа вида

$$F(z, p, q) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}t^p(1+at)^q dt$$

подробно рассмотрены в примере к теореме 1 из Дополнения Б. Так как в данном случае $p = q = \nu - 1/2$, $a = \pm i/2$, то в соответствии с результатами, полученными в этом примере, функции Ханкеля $H_\nu^{(1,2)}(z)$ будут аналитическими функциями каждой из переменных при $|\arg z| < \pi$, $z \neq 0$, $\operatorname{Re}\nu > -1/2$. Для этих функций справедливо следующее асимптотическое представление при $z \to \infty$, когда $\operatorname{Re}\nu > -1/2$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$:

$$H_\nu^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left\{\pm i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\times$$
$$\times\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_k\left(\pm\frac{i}{z}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right]. \quad (5)$$

Здесь

$$C_k = \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + k)}{2^k k!\,\Gamma(\nu + 1/2 - k)},$$

верхний знак относится к функции $H_\nu^{(1)}(z)$, нижний — к функции

$H_\nu^{(2)}(z)$. Если воспользоваться функциональным соотношением $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, то выражение для коэффициента C_k можно упростить. Имеем

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+k\right)=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu+k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-k\right)=\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{(\nu-1/2)(\nu-3/2)\ldots(\nu-k+1/2)}.$$

Поэтому

$$C_k=\prod_{l=1}^{k}\left[\frac{4\nu^2-(2l-1)^2}{8l}\right],\quad C_0=1.$$

С помощью соотношения

$$J_\nu(z)=\left[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)\right]/2$$

получим асимптотическое представление для функции $J_\nu(z)$:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{C_k}{z^k}\cos\left[z-\frac{\pi}{2}\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)\right]+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z^n}\right)\right\}. \quad (6)$$

Мы рассмотрели аналитическое продолжение цилиндрических функций на область $z\neq 0$, $|\arg z|<\pi$, $\operatorname{Re}\nu>-1/2$. Ограничение $\operatorname{Re}\nu>-1/2$ несущественно, так как при $\operatorname{Re}\nu\leqslant-1/2$ аналитическое продолжение цилиндрических функций можно получить с помощью рекуррентного соотношения (3), последовательно уменьшая значения ν на единицу. В силу (2) производные цилиндрических функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1,2)}(z)$ будут аналитичны по переменной z и параметру ν в той же области, что и сами функции. В этой же области по принципу аналитического продолжения рассматриваемые цилиндрические функции будут удовлетворять уравнению Бесселя.

3. Функциональные соотношения. Уравнение Бесселя не меняется при замене ν на $-\nu$. Поэтому, кроме функций $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$, его решениями будут также функции $H_{-\nu}^{(1)}(z)$, $H_{-\nu}^{(2)}(z)$. Для вывода формул, связывающих функции $H_\nu^{(1,2)}(z)$ и $H_{-\nu}^{(1,2)}(z)$, предположим временно, что $|\operatorname{Re}\nu|<1/2$. Тогда для функций Ханкеля $H_{\pm\nu}^{(1,2)}(z)$ будут справедливы асимптотические представления (5). Из этих представлений видно, что функции $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ имеют различное асимптотическое поведение при $z\to\infty$ и поэтому являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя. Следовательно,

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=A_\nu H_\nu^{(1)}(z)+B_\nu H_\nu^{(2)}(z), \quad (7)$$

где A_ν, B_ν — некоторые постоянные. Сравнивая асимптотическое поведение при $z\to\infty$ левой и правой частей равенства (7), получим $A_\nu = e^{i\pi\nu}$, $B_\nu = 0$, т. е.

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu^{(1)}(z). \tag{8}$$

Аналогично выводится соотношение

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu^{(2)}(z). \tag{9}$$

С помощью (8), (9) легко проверить, что асимптотические представления (5), а тем самым и (6), остаются справедливыми при любых значениях ν.

Найдем связь функций $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ с $J_{-\nu}(z)$. Так как

$$J_\nu(z) = \left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right]/2, \quad J_{-\nu}(z) = \left[H_{-\nu}^{(1)}(z) + H_{-\nu}^{(2)}(z)\right]/2, \tag{10}$$

то в силу (8), (9)

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu} J_\nu(z)}{i \sin \pi\nu}, \quad H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi\nu} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}. \tag{11}$$

4. Разложения в степенные ряды. Ранее мы получили разложение функции $J_\nu(z)$ в ряд по степеням z для вещественных значений $z > 0$ и $\operatorname{Re}\nu > 3/2$:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}. \tag{12}$$

Для доказательства справедливости этого разложения при произвольных значениях ν, z исследуем область аналитичности ряда (12) с помощью теоремы Вейерштрасса.

Теорема. *Пусть функции $f_k(z)$ являются аналитическими в области D и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно к функции $f(z)$ в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1 \subset D$. Тогда в области D:*

1) *функция $f(z)$ является аналитической;*

2) $f^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$;

3) *ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ сходится равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1 \subset D$.*

Замечание. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ будет сходиться равномерно в области D, если найдется такое m, что для всякого $z \in D$ при $k > m$ выполняется неравенство

$$|f_k(z)/f_{k-1}(z)| \leqslant q < 1,$$

где q не зависит от z и $|f_m(z)| \leqslant c$ при $z \in D$ ($c = \text{const}$). Этот признак равномерной сходимости ряда называется *признаком Даламбера.*

Покажем, что ряд (12) равномерно сходится по z, ν в области $0 < \delta \leqslant |z| \leqslant R$, $|\nu| \leqslant N$, где R, N — произвольные большие фиксированные числа. Для доказательства достаточно воспользоваться следующей оценкой для отношения двух соседних членов ряда:

$$\left|\frac{u_k(z)}{u_{k-1}(z)}\right| = \frac{|z|^2}{4k|k+\nu|} \leqslant \frac{R^2}{4k(k-N)} \leqslant \frac{1}{4}$$

при $k \geqslant \max(R^2, N+1)$. Так как члены ряда представляют собой аналитические функции переменных z, ν в рассматриваемой области $\delta \leqslant |z| \leqslant R$, $|\arg z| < \pi$, $|\nu| \leqslant N$, то ряд (12) будет аналитической функцией переменных z, ν при произвольных значениях ν и $|\arg z| < \pi$.

Таким образом, обе части равенства (12) будут аналитическими функциями каждой из переменных z, ν при произвольных значениях ν и $|\arg z| < \pi$. По принципу аналитического продолжения соотношение (12) будет справедливым во всей указанной области изменения переменных z, ν.

Если $\nu \neq 0, 1, \ldots$, то функции $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ линейно независимы, так как при $z \to 0$ их поведение различно:

$$J_\nu(z) \approx \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad J_{-\nu}(z) \approx \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}.$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения Бесселя при $\nu \neq n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ можно записать в виде

$$u(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 J_{-\nu}(z).$$

С помощью (11), (12) можно получить разложения в ряды по степеням z для функций $H_\nu^{(1,2)}(z)$. Получение этих разложений при $\nu \neq n$ не представляет труда. Поэтому рассмотрим случай $\nu = n$. Значения $\nu = n$ в правых частях (11) являются устранимыми особыми точками, так как левые части — аналитические функции параметра ν и, следовательно, имеют предел при $\nu \to n$. Знаменатель в соотношениях (11) равен нулю при $\nu = n$, поэтому для существования конечного предела в (11) необходимо, чтобы и числитель равнялся нулю при $\nu = n$, т. е.

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

откуда следует, что при $\nu = n$ решения уравнения Бесселя $J_n(z)$, $J_{-n}(z)$ будут линейно зависимы. Переходя к пределу при $\nu \to n$ и вычисляя пределы по правилу Лопиталя, получим

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left[a_n(z) + (-1)^n a_{-n}(z)\right], \tag{13}$$

где $a_\nu(z) = \partial J_\nu(z)/\partial\nu$ (знак плюс соответствует $H_n^{(1)}(z)$).

Так как в рассмотренной области ряд для $J_\nu(z)$ является равномерно сходящимся рядом, составленным из аналитических функций переменной ν, то по теореме Вейерштрасса для вычисления $a_\nu(z)$ можно продифференцировать почленно ряд для $J_\nu(z)$. В результате получим

$$a_\nu(z) = J_\nu(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\psi(k+\nu+1),$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции (см. Дополнение A). Так как

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \to (-1)^{n+1}n!, \qquad z \to -n$$

(см. (27) из Дополнения A), то

$$(-1)^n a_{-n}(z) = (-1)^n J_{-n}(z)\ln\frac{z}{2} -$$
$$-(-1)^n\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}}{k!}(-1)^{n-k}(n-k-1)! +\right.$$
$$\left.+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}\psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\right\} = J_n(z)\ln\frac{z}{2} -$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\psi(k+1).$$

Поэтому

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\right\}. \qquad (14)$$

При $n = 0$ первую сумму следует считать равной нулю. Значения $\psi(x)$ при целых x можно вычислять по формуле (16) из Дополнения A.

Как следует из (11), (14), функции $H_\nu^{(1,2)}(z)$ при $z = 0$ имеют степенную особенность вида $z^{\pm\nu}$, если $\operatorname{Re}\nu \neq 0$, и логарифмическую особенность, если $\nu = 0$.

§ 16. Интегральное представление Зоммерфельда

1. Интегральное представление Зоммерфельда для цилиндрических функций. При изучении свойств решений уравнения Бесселя для функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$ оказались удобными интегральные представления Пуассона.

Для цилиндрических функций можно получить также интегральное представление другого вида, удобное, например, для решения задач дифракции. Для вывода этого представления восполь-