ления $a_\nu(z)$ можно продифференцировать почленно ряд для $J_\nu(z)$. В результате получим

$$a_\nu(z) = J_\nu(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\psi(k+\nu+1),$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции (см. Дополнение А). Так как

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \to (-1)^{n+1} n!, \qquad z \to -n$$

(см. (27) из Дополнения А), то

$$(-1)^n a_{-n}(z) = (-1)^n J_{-n}(z)\ \ln\frac{z}{2} -$$
$$-(-1)^n\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}}{k!}(-1)^{n-k}(n-k-1)! +\right.$$
$$\left.+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}\psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\right\} = J_n(z)\ln\frac{z}{2} -$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\psi(k+1).$$

Поэтому

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\right\}. \tag{14}$$

При $n = 0$ первую сумму следует считать равной нулю. Значения $\psi(x)$ при целых x можно вычислять по формуле (16) из Дополнения А.

Как следует из (11), (14), функции $H_\nu^{(1,2)}(z)$ при $z = 0$ имеют степенную особенность вида $z^{\pm\nu}$, если $\operatorname{Re}\nu \neq 0$, и логарифмическую особенность, если $\nu = 0$.

§ 16. Интегральное представление Зоммерфельда

1. Интегральное представление Зоммерфельда для цилиндрических функций. При изучении свойств решений уравнения Бесселя для функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$ оказались удобными интегральные представления Пуассона.

Для цилиндрических функций можно получить также интегральное представление другого вида, удобное, например, для решения задач дифракции. Для вывода этого представления воспользоваться зуемся следующими соображениями. В § 14 было показано, что

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi)\, e^{-in\varphi} d\varphi$$

при $z = \sqrt{\lambda}\, r$ является цилиндрической функцией порядка n, если функция v удовлетворяет уравнению $\Delta v + \lambda v = 0$. Простейшим решением уравнения $\Delta v + \lambda v = 0$ при $\lambda = k^2 > 0$ является плоская волна $v = e^{i\mathbf{kr}}$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Если направить ось y по направлению волнового вектора $\mathbf{k}$, то

$$v(r, \varphi) = \exp\{ikr\sin\varphi\}.$$

В результате приходим к следующему интегральному представлению для цилиндрической функции $u_n(z)$:

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\{iz\sin\varphi - in\varphi\}\, d\varphi. \qquad (1)$$

Аналогичные интегральные представления можно получить для цилиндрических функций произвольного порядка ν. Для получения их естественно искать решение уравнения Бесселя при любых ν в виде контурного интеграла

$$u_\nu(z) = \int_C \exp\{iz\sin\varphi - i\nu\varphi\}\, d\varphi.$$

Покажем, что при определенном выборе контура C функция $u_\nu(z)$ будет удовлетворять уравнению Бесселя. Для доказательства, так же как и при выводе (1), будем исходить из того, что $v(r, \varphi) = \exp\{ikr\sin\varphi\}$ — решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + k^2 v = 0. \qquad (2)$$

Легко проверить, что (2) справедливо при любых комплексных значениях r, φ.

Получим уравнение для функции $v_\nu(r) = \int_C v(r, \varphi)\, e^{-i\nu\varphi} d\varphi$ с помощью (2), интегрируя обе части этого уравнения по контуру C с весом $e^{-i\nu\varphi}$ и упрощая член, содержащий $\partial^2 v/\partial\varphi^2$, с помощью двукратного интегрирования по частям. Если потребовать, чтобы возникающая при этом подстановка

$$e^{-i\nu\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} + i\nu v\right)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = i\exp\{ikr\sin\varphi - i\nu\varphi\}(kr\cos\varphi + \nu)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

(φ_1, φ_2 — концы контура C) была равна нулю, то мы придем к уравнению Бесселя для $u_\nu(z) = v_\nu(r)$ при $z = kr$.

Таким образом, мы показали, что функция

$$u_\nu(z) = \int_C \exp\{iz\sin\varphi - i\nu\varphi\}\, d\varphi \qquad (3)$$

действительно является решением уравнения Бесселя при выполнении условия

$$\exp\{iz\sin\varphi - i\nu\varphi\}(z\cos\varphi + \nu)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0. \tag{4}$$

Так как $\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, то условие (4) будет, очевидно, выполнено, если при любом значении ν

$$\exp\{iz\sin\varphi - i\nu\varphi\}\big|_{\varphi=\varphi_1,\varphi_2} = 0. \tag{5}$$

Представления вида (3) называются *представлениями Зоммерфельда.*

2. Интегральные представления Зоммерфельда для функций Ханкеля и функций Бесселя первого рода. В качестве контура C в интегральном представлении для $u_\nu(z)$ можно выбрать, например, контур, концы которого уходят в бесконечность таким образом, что

$$\operatorname{Re}(iz\sin\varphi - i\nu\varphi) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}|z|e^{i\theta}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) - i\nu\varphi\right] \to -\infty, \quad \varphi\to\infty, \tag{6}$$

где $\theta = \arg z$.

Рассмотрим контур C, изображенный на рис. 7 ($\varphi = \chi + i\psi$). Выясним, каким требованиям должны удовлетворять α, β, чтобы условия на концах контура были выполнены.

Пусть $\chi = \alpha$, $\psi\to+\infty$. В этом случае в (6) можно пренебречь величинами φ и $e^{i\varphi}$ по сравнению с $e^{-i\varphi}$. Условие на контур принимает вид

$$\operatorname{Re} e^{i(\theta-\varphi)} \to +\infty, \quad \psi\to+\infty.$$

Оно выполнено, если $\cos(\theta-\alpha) > 0$. Можно выбрать α из условия

$$\theta - \pi/2 < \alpha < \theta + \pi/2. \tag{7}$$

Пусть теперь $\chi = \beta$, $\psi\to-\infty$. В этом случае достаточно потребовать выполнения неравенства $\cos(\theta+\beta) < 0$, что возможно при $\beta = -\alpha \pm \pi$. Соответствующие контуры обозначим через C_+, C_-.

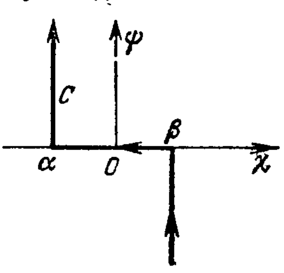

Рис. 7.

Отметим следующий произвол в выборе контуров. Пусть контур C' определяется заданием α', β', удовлетворяющих условиям $\cos(\theta-\alpha') > 0$, $\cos(\theta+\beta') < 0$. Если воспользоваться теоремой Коши, то нетрудно показать, что контур C' можно заменить на любой другой контур C'', определяемый заданием чисел α'', β'', если для всех значений $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$, $\beta \in [\beta', \beta'']$ выполняются неравенства $\cos(\theta-\alpha) > 0$, $\cos(\theta+\beta) < 0$. Из этих соображений ясно, в частности, что в представлении Зоммерфельда контур C можно заменить таким контуром, чтобы его сдвиг на величину, меньшую π, не менял значения интеграла Зоммерфельда.

Так как $u_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению Бесселя, то

$$u_\nu(z) = C_\nu H_\nu^{(1)}(z) + D_\nu H_\nu^{(2)}(z). \tag{8}$$

Найдем коэффициенты C_ν, D_ν, используя известное нам асимптотическое поведение функций $H_\nu^{(1,2)}(z)$. Рассмотрим сначала случай, когда в качестве C выбран контур C_+. Пусть $|z| \to \infty$, $\arg z = \pi/2$. Тогда можно выбрать $\alpha = \beta = \pi/2$, т. е. в выражении для $u_\nu(z)$ положить $\varphi = \pi/2 + i\psi$, где $-\infty < \psi < \infty$, что дает

$$u_\nu(z) = ie^{-i\pi\nu/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z| \operatorname{ch} \psi} e^{\nu\psi} d\psi = 2ie^{-i\pi\nu/2} \int_0^\infty e^{-|z| \operatorname{ch} \psi} \operatorname{ch} \nu\psi \, d\psi.$$

Для выяснения асимптотического поведения функции $u_\nu(z)$ при $z \to \infty$ можно воспользоваться леммой Ватсона (см. Дополнение Б), если предварительно произвести замену $\operatorname{ch} \psi = 1 + t$. Действительно, при такой замене мы получаем

$$u_\nu(z) = 2i \exp\left\{-\frac{i\pi\nu}{2} - |z|\right\} \int_0^\infty e^{-|z|t} f(t)\, dt,$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t(2+t)}} \operatorname{ch}\left[\nu \ln\left(1 + t + \sqrt{t(2+t)}\right)\right].$$

Так как $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}[1 + O(t)]$ при $t \to 0$, то по лемме Ватсона при $z \to \infty$ имеем

$$u_\nu(z) = 2i \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2|z|}} \exp\left\{-i\frac{\pi\nu}{2} - |z|\right\}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] =$$
$$= i\sqrt{\frac{2\pi}{|z|}} \exp\left\{-i\frac{\pi\nu}{2} - |z|\right\}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Сравнение главных членов асимптотики левой и правой частей в (8) дает $D_\nu = 0$, $C_\nu = -\pi$. Таким образом,

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_+} \exp\{iz \sin\varphi - i\nu\varphi\}\, d\varphi. \tag{9}$$

Аналогично, для контура C_- получим

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_-} \exp\{iz \sin\varphi - i\nu\varphi\}\, d\varphi. \tag{10}$$

Отсюда

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \exp\{iz \sin\varphi - i\nu\varphi\}\, d\varphi, \tag{11}$$

где контур C_1 изображен на рис. 8. При $\nu = n$ в силу периодичности подынтегральной функции интегрирование по контуру C_1 сводится к интегрированию по интервалу $(-\alpha-\pi,\ -\alpha+\pi)$. Так как интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от положения этого отрезка, то

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\{iz\sin\varphi - in\varphi\}\,d\varphi, \tag{11a}$$

т. е. $J_n(z)$ — коэффициент разложения функции $e^{iz\sin\varphi}$ в ряд Фурье по функциям $e^{in\varphi}$. Поэтому

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\,e^{in\varphi}. \tag{12}$$

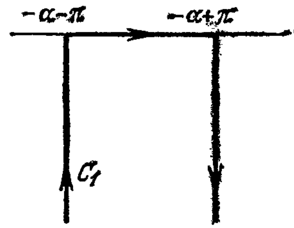

Рис. 8.

Пользуясь принципом аналитического продолжения, можно показать, что (12) справедливо при любых комплексных значениях φ.

Интегральное представление (11a) можно упростить, если воспользоваться формулой

$$\exp\{iz\sin\varphi - in\varphi\} = \cos(z\sin\varphi - n\varphi) + i\sin(z\sin\varphi - n\varphi)$$

и свойствами четности по переменной φ функций $\cos(z\sin\varphi - n\varphi)$ и $\sin(z\sin\varphi - n\varphi)$. В результате для функции $J_n(z)$ мы получаем интегральное *представление Сонина — Бесселя*:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi.$$

§ 17. Специальные классы цилиндрических функций

1. Функции Бесселя второго рода. В прикладных расчетах часто приходится иметь дело с решениями уравнения Бесселя при вещественных значениях ν и положительных значениях z. Пользоваться при этом функциями Ханкеля не всегда удобно, так как они принимают комплексные значения. В рассматриваемом случае $H_\nu^{(2)}(z) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)}$ (черта — знак комплексного сопряжения) и

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right] = \mathrm{Re}\,H_\nu^{(1)}(z).$$

В связи с этим естественно в качестве второго линейно независимого вещественного решения уравнения Бесселя рассматривать $\mathrm{Im}\,H_\nu^{(1)}(z)$, т. е. функцию

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\right]. \tag{1}$$

Функция $Y_\nu(z)$ называется *функцией Бесселя второго рода* *).

*) Иногда ее называют *функцией Вебера*, а также *функцией Неймана* и обозначают $N_\nu(z)$. Заметим, что функции Ханкеля называют также *функциями Бесселя третьего рода*.