ности подынтегральной функции интегрирование по контуру C_1 сводится к интегрированию по интервалу $(-\alpha-\pi, -\alpha+\pi)$. Так как интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от положения этого отрезка, то

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{iz\sin\varphi - in\varphi\}\, d\varphi, \tag{11a}$$

т. е. $J_n(z)$ — коэффициент разложения функции $e^{iz\sin\varphi}$ в ряд Фурье по функциям $e^{in\varphi}$. Поэтому

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{in\varphi}. \tag{12}$$

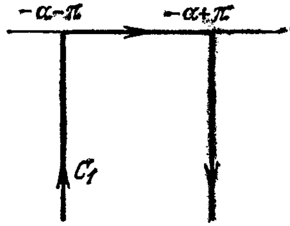

Рис. 8.

Пользуясь принципом аналитического продолжения, можно показать, что (12) справедливо при любых комплексных значениях φ.

Интегральное представление (11a) можно упростить, если воспользоваться формулой

$$\exp\{iz\sin\varphi - in\varphi\} = \cos(z\sin\varphi - n\varphi) + i\sin(z\sin\varphi - n\varphi)$$

и свойствами четности по переменной φ функций $\cos(z\sin\varphi - n\varphi)$ и $\sin(z\sin\varphi - n\varphi)$. В результате для функции $J_n(z)$ мы получаем интегральное *представление Сонина — Бесселя*:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi.$$

§ 17. Специальные классы цилиндрических функций

1. Функции Бесселя второго рода. В прикладных расчетах часто приходится иметь дело с решениями уравнения Бесселя при вещественных значениях ν и положительных значениях z. Пользоваться при этом функциями Ханкеля не всегда удобно, так как они принимают комплексные значения. В рассматриваемом случае $H_\nu^{(2)}(z) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)}$ (черта — знак комплексного сопряжения) и

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right] = \operatorname{Re} H_\nu^{(1)}(z).$$

В связи с этим естественно в качестве второго линейно независимого вещественного решения уравнения Бесселя рассматривать $\operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(z)$, т. е. функцию

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\right]. \tag{1}$$

Функция $Y_\nu(z)$ называется *функцией Бесселя второго рода* *).

*) Иногда ее называют *функцией Вебера*, а также *функцией Неймана* и обозначают $N_\nu(z)$. Заметим, что функции Ханкеля называют также *функциями Бесселя третьего рода*.

Функцию $Y_\nu(z)$, определяемую равенством (1), можно рассматривать при любых комплексных значениях ν, z. Она будет аналитической функцией ν во всей комплексной плоскости, включая $\nu = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), и аналитической функцией z при $z \neq 0$, $|\arg z| < \pi$.

Приведем основные свойства функции $Y_\nu(z)$, вытекающие из соответствующих свойств функций Ханкеля.

а) Выражение $Y_\nu(z)$ через $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$:

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}, \quad \nu \neq n.$$

б) Разложение $Y_\nu(z)$ в ряд при $\nu = n$:

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)\right]\right\}.$$

в) Асимптотическое поведение $Y_\nu(z)$ при $z \to \infty$:

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{z}\right)\right].$$

г) Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования:

$$Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}Y_\nu(z),$$

$$Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) = 2Y'_\nu(z).$$

Графики функций Бесселя $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ для некоторых целых значений ν при $x > 0$ приведены на рис. 9, 10.

2. Функции Бесселя полуцелого порядка. Полиномы Бесселя. Специальный класс цилиндрических функций образуют функции с индексом, равным половине нечетного числа *). Этот класс замечателен тем, что в рассматриваемом случае цилиндрические функции могут быть выражены через элементарные функции. Чтобы показать это, найдем предварительно выражения для функций $H_{1/2}^{(1,2)}(z)$, для чего воспользуемся формулами (14.19а), (14.20а):

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\pm i(z-\pi/2)},$$

откуда

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \quad Y_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

---

*) К таким функциям приводит, например, решение уравнения Гельмгольца методом разделения переменных в сферических координатах.

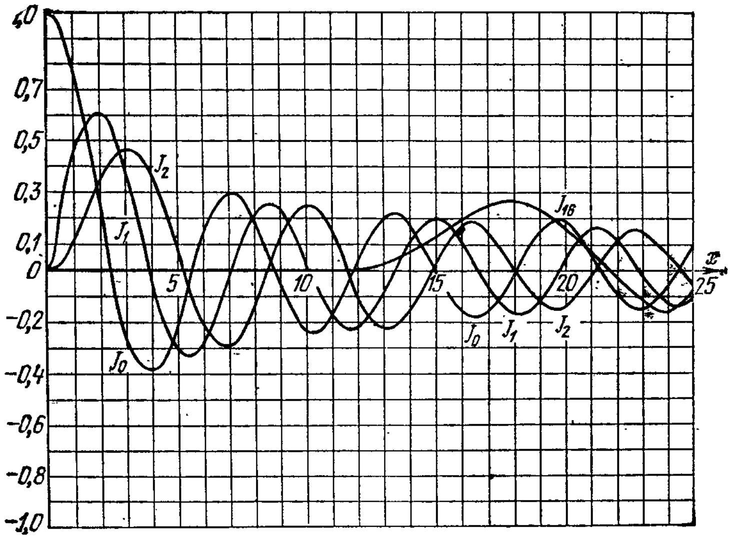

Рис. 9.

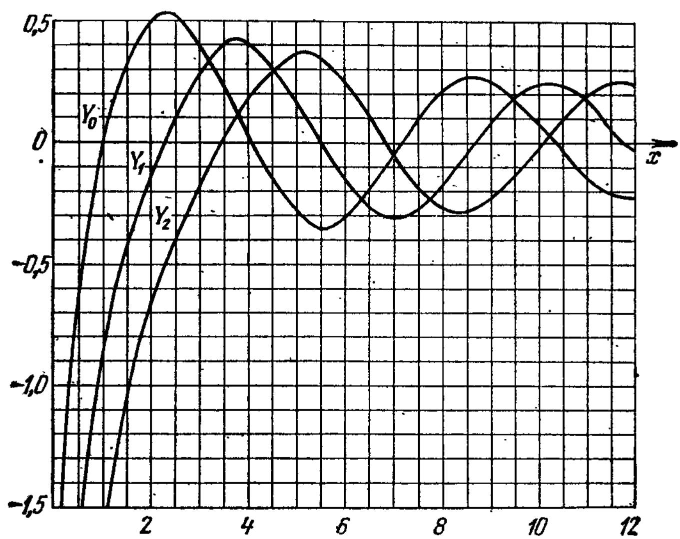

Рис. 10.

Далее, согласно функциональным соотношениям (15.8), (15.9),

$$H^{(1)}_{-1/2}(z) = e^{i\pi/2} H^{(1)}_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz},$$

$$H^{(2)}_{-1/2}(z) = e^{-i\pi/2} H^{(2)}_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-iz}.$$

Отсюда

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,\quad Y_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z.$$

Полагая в формулах (15.4) $\nu=-1/2$, получим

$$H^{(1,2)}_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}, \tag{2}$$

$$J_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\cos z, \tag{3}$$

$$Y_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\sin z. \tag{4}$$

Ж. Лиувиллем было доказано, что случай полуцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

Иэ формулы (2) по индукции следует, что

$$H^{(1)}_{n+1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz}p_n\left(\frac{1}{iz}\right),$$

где $p_n(s)$ — полином степени n относительно переменной s. Из асимптотического поведения функции $H^{(1)}_{n+1/2}(z)$ при $z\to\infty$ легко найти, что $p_n(0)=(-i)^{n+1}$. Покажем, что $p_n(s)$ является полиномом гипергеометрического типа и может быть выражен через полиномы Бесселя (см. § 5, п. 1):

$$y_n(z)=2^{-n}e^{2/z}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{2n}e^{-2/z}\right).$$

Действительно, из дифференциального уравнения для функции Ханкеля $H^{(1)}_{n+1/2}(z)$ можно получить следующее дифференциальное уравнение для полиномов $p_n(s)$:

$$s^2p_n''(s)+2(s+1)p_n'(s)-n(n+1)p_n(s)=0.$$

Так как это уравнение гипергеометрического типа, то $p_n(s)$ будет полиномом гипергеометрического типа. Записывая выражение для полинома $p_n(s)$ с помощью формулы Родрига, получим

$$p_n(s)=B_ne^{2/s}\frac{d^n}{ds^n}\left(s^{2n}e^{-2/s}\right).$$

Отсюда видно, что $p_n(s)$ с точностью до нормировочного множителя совпадает с полиномом Бесселя $y_n(s)$. Так как $p_n(0)=(i)^{n+1}$, $y_n(0)=1$, то окончательно получаем следующую связь функций Ханкеля $H^{(1)}_{n+1/2}(z)$ с полиномами Бесселя:

$$H^{(1)}_{n+1/2}(z)=(-i)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz}y_n\left(\frac{1}{iz}\right).$$

Аналогично,

$$H^{(2)}_{n+1/2}(z)=i^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-iz}y_n\left(-\frac{1}{iz}\right).$$

3. Функции Бесселя мнимого аргумента. Уравнение Бесселя

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0$$

рассматривалось нами для комплексных значений z. Наиболее важным для практических применений является случай, когда значения z положительны. В ряде случаев представляет интерес также решение уравнения

$$z^2u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0 \tag{5}$$

при $z > 0$, которое получается из уравнения Бесселя заменой z на iz. В связи с этим специальные классы решений уравнения (5) носят название *функций Бесселя мнимого аргумента* или *модифицированных функций Бесселя.*

Линейно независимыми решениями уравнения (5), очевидно, являются функции $J_\nu(iz)$, $H_\nu^{(1)}(iz)$. Решение $J_\nu(iz)$ ограничено при $z \to 0$, если $\nu > 0$, а $H_\nu^{(1)}(z)$ при $z \to \infty$.

Обычно вместо функций $J_\nu(iz)$, $H_\nu^{(1)}(iz)$ используются функции

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(iz), \tag{6}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}e^{i\pi(\nu+1)/2}H_\nu^{(1)}(iz). \tag{7}$$

Эти функции принимают вещественные значения при $z > 0$ и вещественных ν, что вытекает из соотношений

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}, \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\pi\nu}.$$

Приведенные соотношения являются следствием разложения функции $J_\nu(z)$ в степенной ряд и функционального соотношения, связывающего функцию $H_\nu^{(1)}(iz)$ с функциями $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$. Функцию $K_\nu(z)$ называют *функцией Макдональда.*

Приведем основные свойства функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, вытекающие из их связи с функциями $J_\nu(iz)$, $H_\nu^{(1)}(iz)$.

1. Интегральные представления Пуассона. Из представлений (14.18), (14.19а) вытекает, что

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\operatorname{ch} zt\,dt,$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)}\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt.$$

2. Разложения в ряды:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\pi\nu}, \qquad \nu \neq n,$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\,(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} +$$

$$+ \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}\left[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)\right] \tag{8}$$

(при $n=0$ первую из сумм следует полагать равной нулю).

Из разложения для $I_\nu(z)$ видно, что при $z>0$, $\nu \geqslant 0$ функция $I_\nu(z)$ положительна и монотонно растет с ростом z (рис. 11).

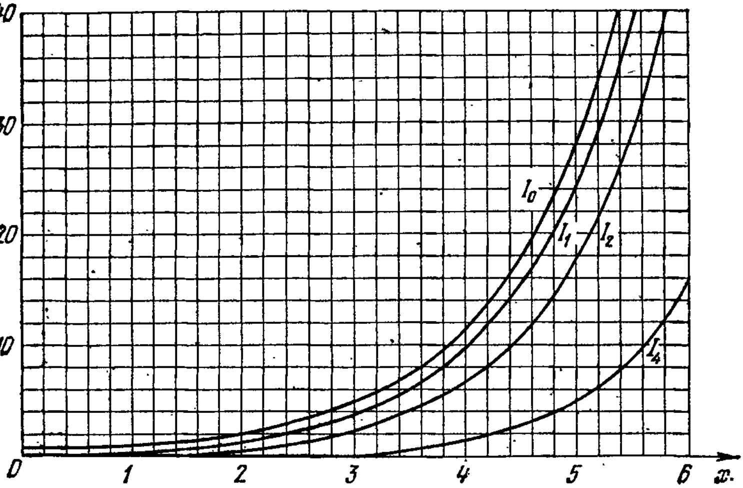

Рис. 11.

3. Связь функций $K_\nu(z)$ и $K_{-\nu}(z)$, $I_n(z)$ и $I_{-n}(z)$:

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z). \tag{9}$$

4. Асимптотическое поведение при $z \to +\infty$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

5. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования:

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z),$$

в частности,

$$I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z).$$

6. Выражение функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ полуцелого порядка через элементарные функции:

$$I_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{ch} z, \qquad n=0,1,\ldots,$$

$$K_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z}, \qquad n=0,1\ldots$$

7. Интегральное представление Зоммерфельда для $K_\nu(z)$ при $z>0$:

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-z\operatorname{ch}\psi+\nu\psi\}\,d\psi=\int_0^{\infty}\exp\{-z\operatorname{ch}\psi\}\operatorname{ch}\nu\psi\,d\psi. \tag{10}$$

Для вывода (10) мы положили в (16.9) $\alpha=\pi/2$, $\varphi=\pi/2+i\psi$, где $-\infty<\psi<\infty$. Из представления (10) видно, что при $z>0$ и вещественных ν функция Макдональда положительна и монотонно убывает с ростом z (рис. 12).

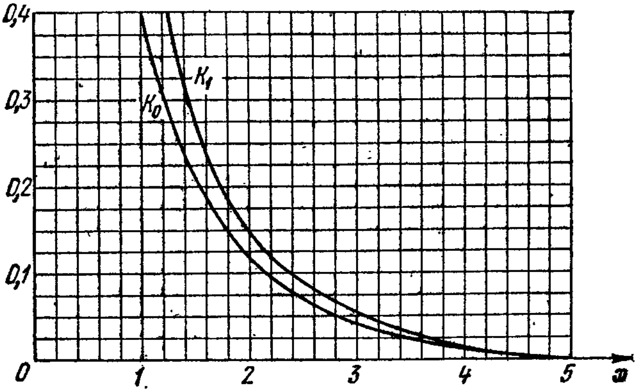

Рис. 12.

Если в (10) при $z>0$ произвести замену $ze^{-\psi}/2=t$, то для $K_\nu(z)$ получим интересное для приложений видоизменение интегрального представления Зоммерфельда:

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\infty}\exp\left\{-t-\frac{z^2}{4t}\right\}t^{-\nu-1}\,dt. \tag{11}$$

Замечание. Из свойств функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ вытекает, что общее решение уравнения (5) при $\nu\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ имеет вид

$$u(z)=AI_\nu(z)+BK_\nu(z).$$

Если функция $u(z)$ ограничена при $z=0$, то следует положить $B=0$. Если функция $u(z)$ ограничена при $z\to+\infty$, то $A=0$.

Мы рассмотрели специальные классы цилиндрических функций, которые наиболее часто используются при решении различных задач. Наряду с рассмотренными для некоторых интересных задач удобно ввести другие специальные классы функций, связанные с цилиндрическими функциями, в частности, вещественные и мнимые части цилиндрических функций $u_\nu(z)$ при $\operatorname{Im}\nu = 0$, $\arg z = \pm\pi/4$, $\pm 3\pi/4$, функцию Эйри

$$\operatorname{Ai}(z) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{|z|}{3\pi}}\, K_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right), & z < 0, \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{\pi z}\left[I_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right)\right], & z > 0. \end{cases}$$

Функция $\operatorname{Ai}(z)$ является решением уравнения $u'' + zu = 0$.

§ 18. Теоремы сложения

Теоремами сложения в теории цилиндрических функций называются формулы вида

$$u_\nu(R) = F(r, \rho, \theta) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\, g_n(\rho)\, h_n(\theta), \tag{1}$$

где r, ρ, R — длины сторон произвольного треугольника, θ — угол между сторонами r и ρ (рис. 13), а функция $F(r, \rho, \theta)$ является элементарной и имеет достаточно простой вид. Эти формулы дают разложение цилиндрической функции $u_\nu(R)$ порядка ν в ряд, члены которого представляют собой произведение некоторой не зависящей от индекса суммирования функции достаточно простого вида $F(r, \rho, \theta)$ на множители, каждый из которых зависит только от одной из переменных r, ρ, θ. Формулы рассматриваемого типа играют важную роль в математической физике и различных приложениях цилиндрических функций*).

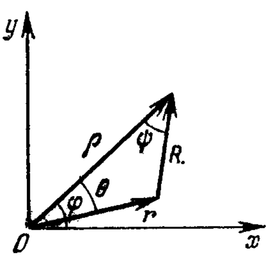

Рис. 13.

1. **Теорема сложения Графа.** Пусть $u_\nu(z)$ обозначает одну из цилиндрических функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Для вывода простейшей теоремы сложения воспользуемся интегральным представлением Зоммерфельда для функции $u_\nu(R)$:

$$u_\nu(R) = A \int_C \exp\{iR\sin\varphi - i\nu\varphi\}\, d\varphi, \tag{2}$$

где A — нормировочная постоянная, которая для рассматриваемых функций не зависит от ν.

*) См., например, Галанин А. Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах.— М.: Энергоатомиздат, 1984.