Мы рассмотрели специальные классы цилиндрических функций, которые наиболее часто используются при решении различных задач. Наряду с рассмотренными для некоторых интересных задач удобно ввести другие специальные классы функций, связанные с цилиндрическими функциями, в частности, вещественные и мнимые части цилиндрических функций $u_\nu(z)$ при $\operatorname{Im}\nu = 0$, $\arg z = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$, функцию Эйри

$$\operatorname{Ai}(z) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{|z|}{3\pi}}\, K_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}|z|^{3/2}\right), & z<0, \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{\pi z}\left[I_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right) + I_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}z^{3/2}\right)\right], & z>0. \end{cases}$$

Функция $\operatorname{Ai}(z)$ является решением уравнения $u'' + zu = 0$.

§ 18. Теоремы сложения

Теоремами сложения в теории цилиндрических функций называются формулы вида

$$u_\nu(R) = F(r, \rho, \theta) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\, g_n(\rho)\, h_n(\theta), \tag{1}$$

где r, ρ, R — длины сторон произвольного треугольника, θ — угол между сторонами r и ρ (рис. 13), а функция $F(r, \rho, \theta)$ является элементарной и имеет достаточно простой вид. Эти формулы дают разложение цилиндрической функции $u_\nu(R)$ порядка ν в ряд, члены которого представляют собой произведение некоторой не зависящей от индекса суммирования функции достаточно простого вида $F(r, \rho, \theta)$ на множители, каждый из которых зависит только от одной из переменных r, ρ, θ. Формулы рассматриваемого типа играют важную роль в математической физике и различных приложениях цилиндрических функций *).

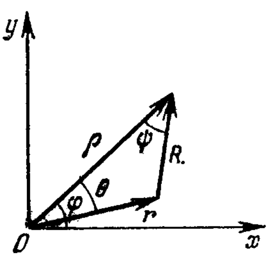

Рис. 13.

1. Теорема сложения Графа. Пусть $u_\nu(z)$ обозначает одну из цилиндрических функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Для вывода простейшей теоремы сложения воспользуемся интегральным представлением Зоммерфельда для функции $u_\nu(R)$:

$$u_\nu(R) = A \int_C \exp\{iR\sin\varphi - i\nu\varphi\}\, d\varphi, \tag{2}$$

где A — нормировочная постоянная, которая для рассматриваемых функций не зависит от ν.

*) См., например, Галанин А. Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах.— М.: Энергоатомиздат, 1984.

Рассмотрим треугольник, изображенный на рис. 13. Проектируя векторное равенство $\mathbf{R}=\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}$ на ось y, получим

$$R\sin(\varphi+\psi)=\rho\sin\varphi-r\sin(\varphi-\theta).$$

Очевидно, что полученное соотношение по принципу аналитического продолжения сохраняет силу и при комплексных значениях φ.

Контур C, как было показано в § 16, можно выбрать таким образом, чтобы его сдвиг на величину ψ, меньшую π, не менял значения интеграла. Заменяя в (2) φ на $\varphi+\psi$, получим

$$u_\nu(R)e^{i\nu\psi}=A\int_C \exp\{iR\sin(\varphi+\psi)-i\nu\varphi\}\,d\varphi=$$

$$=A\int_C \exp\{i\rho\sin\varphi+ir\sin(\theta-\varphi)-i\nu\varphi\}\,d\varphi.$$

Так как, согласно (16.12),

$$e^{ir\sin(\theta-\varphi)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(r)\,e^{in(\theta-\varphi)},$$

то

$$u_\nu(R)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}J_n(r)\,A\int_C\exp\{i\rho\sin\varphi-i(\nu+n)\varphi\}\,d\varphi=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(r)\,u_{\nu+n}(\rho)\,e^{in\theta}.$$

Возможность изменения порядка суммирования и интегрирования может быть обоснована при $r<\rho$. Таким образом, окончательно приходим к следующей формуле:

$$u_\nu(R)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(r)\,u_{\nu+n}(\rho)\,e^{in\theta}.$$

Так как при замене R на kR, r на kr, ρ на $k\rho$ углы θ и ψ не меняются, то полученная формула может быть записана в виде

$$u_\nu(kR)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)\,u_{\nu+n}(k\rho)\,e^{in\theta}. \qquad (3)$$

Соотношение (3) называется *теоремой сложения Графа.*

2. Теорема сложения Гегенбауэра. Другая теорема сложения соответствует случаю, когда в (1) $F(r,\rho,\theta)=R^\nu$. Для ее вывода рассмотрим функцию

$$u_\nu(R)/R^\nu=v(R).$$

Для определенности будем предполагать, что $r<\rho$. В этом случае $R\neq0$ и функция $v(R)$ будет ограниченной при $r\to0$.

Функция v по переменной R удовлетворяет уравнению (см. (14.4))

$$Rv'' + (2\nu + 1)v' + Rv = 0. \qquad (4)$$

Из этого уравнения легко получить уравнение в частных производных по переменным r и $\mu = \cos\theta$ при фиксированном значении ρ. Так как $R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\mu}$, то

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{dv}{dR}\cdot\frac{r - \rho\mu}{R}, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu} = -\frac{dv}{dR}\cdot\frac{r\rho}{R},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{d^2 v}{dR^2}\left(\frac{r-\rho\mu}{R}\right)^2 + \frac{dv}{dR}\left[\frac{1}{R} - \frac{(r-\rho\mu)^2}{R^3}\right],$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} = \frac{d^2 v}{dR^2}\left(\frac{r\rho}{R}\right)^2 - \frac{dv}{dR}\cdot\frac{(r\rho)^2}{R^3}.$$

Отсюда, исключая ρ, находим

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{dv}{dR} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial \mu}.$$

Так как $R^2 = (r - \rho\mu)^2 + \rho^2(1 - \mu^2)$, то

$$\frac{d^2 v}{dR^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}.$$

Подставляя в (4) полученные выражения для dv/dR и d^2v/dR^2, приходим к следующему уравнению в частных производных:

$$r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (2\nu + 1)\,r\frac{\partial v}{\partial r} + r^2 v + (1 - \mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - (2\nu + 1)\,\mu\frac{\partial v}{\partial \mu} = 0. \quad (5)$$

Теорема сложения в данном случае в соответствии с (1) должна иметь вид

$$v(R) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\, g_n(\rho)\, h_n(\mu), \qquad \mu = \cos\theta. \qquad (6)$$

Определим вид функций $f_n(r)$, $g_n(\rho)$, $h_n(\mu)$, исходя из требования, чтобы каждый член ряда (6) удовлетворял уравнению (5). В соответствии с этим будем искать частные ограниченные решения уравнения (5) методом разделения переменных, полагая

$$v = f(r)h(\mu). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (5), получим

$$\frac{r^2 f'' + (2\nu + 1)\, rf' + r^2 f}{f} = \frac{-(1-\mu^2)\,h'' + (2\nu+1)\,\mu h'}{h} = \lambda, \qquad (5а)$$

где λ — постоянная. Отсюда для функции $h(\mu)$ получаем уравнение гипергеометрического типа

$$(1 - \mu^2)h'' - (2\nu + 1)\mu h' + \lambda h = 0,$$

решениями которого при $\lambda = n(n + 2\nu)$ будут полиномы Якоби

$P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)$. Поэтому естественно в (6) положить

$$h_n(\mu) = P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu).$$

Тогда формула (6) будет давать разложение функции $v(R)$ в ряд по полиномам Якоби:

$$v(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r, \rho) P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu). \tag{8}$$

Функция $v(R)$ удовлетворяет условиям теоремы разложения в ряд по полиномам Якоби $P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)$ при $\nu > -1/2$ (см. § 8), причем в этом случае

$$a_n(r, \rho) = \frac{1}{d_n^2} \int_{-1}^{1} v(R) (1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{d_n^2} \int_{-1}^{1} \frac{u_\nu(R)}{R^\nu} (1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\, d\mu,$$

где d_n^2 — квадрат нормы полинома Якоби.

Остается показать, что коэффициент разложения $a_n(r, \rho)$ можно представить в виде

$$a_n(r, \rho) = f_n(r) g_n(\rho).$$

Для доказательства проинтегрируем на интервале $(-1, 1)$ с весом $(1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)$ уравнение (5) и упростим члены, содержащие $\partial^2 v/\partial\mu^2$ и $\partial v/\partial\mu$ с помощью интегрирования по частям. Так как

$$\left[(1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial\mu^2} - (2\nu+1)\mu\frac{\partial v}{\partial\mu}\right](1-\mu^2)^{\nu-1/2} = \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2}\frac{\partial v}{\partial\mu}\right],$$

то получим

$$\int_{-1}^{1}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial\mu^2} - (2\nu+1)\mu\frac{\partial v}{\partial\mu}\right](1-\mu^2)^{\nu-1/2} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\, d\mu =$$

$$= (1-\mu^2)^{\nu+1/2}\frac{\partial v}{\partial\mu} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{\partial v}{\partial\mu}(1-\mu^2)^{\nu+1/2}\frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\, d\mu =$$

$$= (1-\mu^2)^{\nu+1/2}\left[\frac{\partial v}{\partial\mu} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu) - v\frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\right]\Bigg|_{-1}^{1} +$$

$$+ \int_{-1}^{1} v \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2}\frac{d}{d\mu} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\right] d\mu.$$

Так как $\nu + 1/2 > 0$, то подстановки равны нулю. Кроме того, из уравнения для полиномов Якоби следует, что

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^{\nu+1/2}\frac{d}{d\mu}P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\right]=$$
$$=-n(n+2\nu)(1-\mu^2)^{\nu-1/2}P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu).$$

В результате мы приходим к дифференциальному уравнению для функции $a_n(r, \rho)$:

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial r^2}+\frac{2\nu+1}{r}\frac{\partial a_n}{\partial r}+\left[1-\frac{n(n+2\nu)}{r^2}\right]a_n=0,$$

которое, как и следовало ожидать, совпадает с (5а) при $\lambda=n(n+2\nu)$.

Полученное уравнение является частным случаем уравнения Ломмеля. Единственным ограниченным при $r\to 0$ решением этого уравнения с точностью до множителя, не зависящего от r, является функция $\frac{1}{r^\nu}J_{\nu+n}(r)$, т. е.

$$a_n(r, \rho)=\frac{1}{r^\nu}J_{\nu+n}(r)\,g_n(\rho).$$

Таким образом,

$$a_n(r, \rho)=\frac{1}{r^\nu}J_{\nu+n}(r)\,g_n(\rho)=$$
$$=\frac{1}{d_n^2}\int_{-1}^{1}\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}(1-\mu^2)^{\nu-1/2}P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\,d\mu,\qquad(9)$$

где d_n^2 — квадрат нормы полинома Якоби. Чтобы найти функцию $g_n(\rho)$, вычислим интеграл в правой части (9), используя формулу Родрига для полиномов Якоби

$$P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\cdot\frac{1}{(1-\mu^2)^{\nu-1/2}}\cdot\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\right]$$

и производя интегрирование по частям n раз:

$$\int_{-1}^{1}\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}(1-\mu^2)^{\nu-1/2}P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\,d\mu=$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left[\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right]d\mu.$$

Все подстановки при $\mu=\pm 1$ обращаются в нуль, так как они содержат множители $1-\mu^2$ в положительных степенях.

С другой стороны, для произвольной функции $v(R)$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}v(R)=-\frac{r\rho}{R}\frac{dv}{dR},$$

откуда

$$\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left(\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right)=(r\rho)^n\left(-\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^n\left(\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right).$$

По формуле дифференцирования (15.4) имеем

$$\left(-\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^n\left(\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}\right)=\frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}.$$

В результате получаем

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}(1-\mu^2)^{\nu-1/2}P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu)\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2^n n!}(r\rho)^n\int\limits_{-1}^{1}\frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}d\mu.$$

Отсюда, согласно (9),

$$g_n(\rho)\frac{J_{\nu+n}(r)}{r^{\nu+n}}=\frac{\rho^n}{2^n n!\,d_n^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}d\mu. \qquad (10)$$

Пусть $r\to 0$. Тогда $R\to\rho$ и, следовательно,

$$\frac{g_n(\rho)}{2^{\nu+n}\Gamma(\nu+n+1)}=\frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu}\cdot\frac{1}{2^n n!\,d_n^2}\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}d\mu.$$

Так как (см. § 5, табл. 1)

$$d_n^2=\frac{2^{2\nu-1}\Gamma^2(n+\nu+1/2)}{n!\,(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)},$$

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}d\mu=2\int\limits_{0}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}d\mu=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{n+\nu-1/2}t^{-1/2}dt=\frac{\Gamma(n+\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+\nu+1)},$$

то окончательно находим

$$g_n(\rho)=\frac{\sqrt{\pi}\,(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}{2^{\nu-1}\,\Gamma(n+\nu+1/2)}\,\frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu}.$$

В результате разложение (8) примет вид

$$\frac{u_\nu(R)}{R^\nu}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+\nu+1/2)}\frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu}\,\frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu}\,P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu). \qquad (11)$$

Если вместо полиномов Якоби использовать полиномы Гегенбауэра

$$C_n^\nu(\mu) = \frac{(2\nu)_n}{(\nu+1/2)_n} P_n^{(\nu-1/2,\nu-1/2)}(\mu),$$

то разложение (11) примет более простой вид:

$$\frac{u_\nu(R)}{R^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n) \frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu} \frac{u_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu} C_n^\nu(\mu). \tag{12}$$

Напомним, что полученная формула была выведена для $\nu > -1/2$, $r < \rho$.

Очевидно, что формула (12) остается справедливой, если в ней произвести замену R на kR, r на kr, ρ на $k\rho$, т. е.

$$\frac{u_\nu(kR)}{(kR)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu} \frac{u_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu} C_n^\nu(\mu). \tag{13}$$

Соотношение (13) называется *теоремой сложения Гегенбауэра*.

Теоремы сложения Графа и Гегенбауэра были выведены при некоторых ограничениях, наложенных на параметры. Пользуясь принципом аналитического продолжения, формулы (3), (13) можно распространить на более широкую область значений параметров.

3. Разложение сферической и плоской волны по полиномам Лежандра. Рассмотрим некоторые следствия из теоремы сложения Гегенбауэра, которые широко применяются, например, в квантовомеханической теории рассеяния, при решении задач дифракции.

1) Полагая в (13) $\nu = 1/2$, $u_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z)$ и используя явное выражение для функции $H_{1/2}^{(1)}(z)$, получим

$$\frac{e^{ikR}}{R} = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\mu).$$

Мы воспользовались тем, что $C_n^{1/2}(\mu) = P_n(\mu)$, где $P_n(\mu)$ — полином Лежандра.

2) Представляет интерес предельная форма теоремы сложения, получающаяся из (13) при $u_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(z)$ и $\rho \to \infty$. Имеем

$$R = \rho \sqrt{1 - \frac{2r\mu}{\rho} + \frac{r^2}{\rho^2}} = \rho - r\mu + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\frac{1}{(k\rho)^\nu} H_{\nu+n}^{(2)}(k\rho)}{\frac{1}{(kR)^\nu} H_\nu^{(2)}(kR)} = \lim_{\rho\to\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\nu+1/2} i^n e^{-ik(\rho-R)} = i^n e^{-ikr\mu}.$$

Поэтому из (13) получим

$$e^{ikr\mu} = 2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty} i^n(\nu+n)\frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^{\nu}}C_n^{\nu}(\mu).$$

При $\nu = 1/2$ отсюда легко вывести *разложение плоской волны* $e^{i\mathbf{kr}}$ по полиномам Лежандра:

$$e^{i\mathbf{kr}} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left(n+\frac{1}{2}\right)J_{n+1/2}(kr)\,P_n(\mu), \tag{14}$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mu = \cos\theta$, θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$.

§ 19. Квазиклассическое приближение

При рассмотрении соответствия между классической физикой, оформившейся к концу XIX в., и появившейся в начале XX в. квантовой механикой возникла задача о получении равномерной асимптотики при $\lambda \to +\infty$ решений дифференциального уравнения вида

$$[k(x)y']' + \lambda r(x)y = 0.$$

Полученное при таком исследовании приближенное представление решений уравнения в квантовой механике называют *квазиклассическим приближением.* Квазиклассическое приближение оказалось удобным при рассмотрении многих вопросов математической физики.

1. Квазиклассическое приближение для решений уравнений второго порядка. Выясним поведение решений уравнения

$$[k(x)y']' + \lambda r(x)y = 0 \tag{1}$$

при $\lambda \to +\infty$. Поведение решений этого уравнения существенно зависит от знака функций $k(x)$ и $r(x)$, в чем легко убедиться, полагая, например, $k(x) = \mathrm{const}$, $r(x) = \mathrm{const}$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать уравнение (1) в области, где функции $k(x)$, $r(x)$ знакопостоянны. Рассмотрим сначала случай, когда на некотором интервале (a, b) функции $k(x)$, $r(x)$ имеют одинаковые знаки, например $k(x) > 0$, $r(x) > 0$, и пусть эти функции имеют непрерывные производные первого и второго порядка.

1°. Приведем уравнение (1) с помощью замены переменных

$$y(x) = \varphi(x)u(s), \qquad s = s(x), \tag{2}$$

к более удобному для исследования виду. После этой замены уравнение (1) примет вид

$$u'' + f(s)u' + [\lambda g(s) - q(s)]u = 0, \tag{1a}$$