ГЛАВА IV

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В главах II, III мы рассмотрели свойства классических ортогональных полиномов и функций Бесселя. Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые являются частными случаями обобщенного уравнения гипергеометрического типа

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0, \qquad (1)$$

где $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени. Используя результаты гл. I, можно изучить свойства решений произвольного обобщенного уравнения гипергеометрического типа.

С помощью замены переменных $u = \varphi(z)y$ путем специального выбора функции $\varphi(z)$ уравнения вида (1) сводятся к уравнениям гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \qquad (2)$$

где $\tau(z)$ — полином не выше первой степени, λ — некоторая постоянная (см. § 1). Для уравнения (2) в § 3 был указан способ построения частных решений. В настоящей главе получающиеся этим способом частные решения будут изучены более подробно.

§ 20. Уравнения гипергеометрического типа и их решения

1. Приведение к каноническому виду. Приведем уравнение (2) с помощью линейной замены независимой переменной к каноническому виду. При этом в зависимости от степени полинома $\sigma(z)$ возможны три случая.

1) Пусть $\sigma(z)$ — полином второй степени с различными корнями: $\sigma(z) = (z-a)(b-z)$, $a \neq b$ *). После замены $z = a + (b-a)s$

*) Если полином $\sigma(z)$ имеет кратные корни, то уравнение (2) может быть сведено к уравнению гипергеометрического типа, для которого $\sigma(z)$ является полиномом первой степени (см. § 1).

приходим к уравнению

$$s(1-s)y'' + \frac{1}{b-a}\tau[a+(b-a)s]y' + \lambda y = 0.$$

Очевидно, всегда можно так подобрать параметры α, β, γ, чтобы записать полученное уравнение в виде

$$s(1-s)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)s]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Это уравнение называется *гипергеометрическим уравнением* *).

2) Пусть $\sigma(z)$ — полином первой степени: $\sigma(z) = z - a$. Полагая $z = a + bs$, запишем уравнение (2) в виде

$$sy'' + \tau(a+bs)y' + \lambda by = 0.$$

Если $\tau'(z) = 0$, то это уравнение при любом значении b является уравнением Ломмеля (14.4), решения которого выражаются через цилиндрические функции. Если же $\tau'(z) \neq 0$, то при $b = -1/\tau'(z)$ имеем

$$\tau(a+bs) = \tau(a) + \tau'(a)bs = \tau(a) - s.$$

Введем обозначения $\gamma = \tau(a)$, $\alpha = -\lambda b$. Тогда уравнение примет вид

$$sy'' + (\gamma - s)y' - \alpha y = 0.$$

Это уравнение называется *вырожденным гипергеометрическим уравнением.*

3) Если функция $\sigma(z)$ не зависит от z, то можно считать $\sigma(z) = 1$. При $\tau'(z) = 0$ уравнение (2) будет линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами. Если же $\tau(z) \neq 0$, то с помощью замены $z = a + bs$ уравнение (2) можно записать в виде

$$y'' + b\tau(a+bs)y' + \lambda b^2 y = 0.$$

Подбором постоянных a, b, ν полученное уравнение может быть приведено к уравнению

$$y'' - 2sy' + 2\nu y = 0,$$

которое называется *уравнением Эрмита* (при $\nu = n$ оно совпадает с уравнением для полиномов Эрмита).

2. Преобразование уравнений гипергеометрического типа в уравнения того же типа. Уравнение (2) является частным случаем уравнения (1) при $\tilde{\tau}(z) = \tau(z)$, $\tilde{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z)$. Поэтому его можно преобразовать в уравнение того же типа с помощью замены $u = \varphi(z)y$ (см. § 1), если функция $\varphi(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z),$$

где

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tau}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tau}{2}\right)^2 - \varkappa\sigma}, \qquad \varkappa = \lambda - k.$$

*) Гипергеометрическое уравнение часто называют также *уравнением Гаусса.*

Постоянная $\varkappa$ выбирается из условия, чтобы дискриминант полинома второй степени, стоящего под корнем, был равен нулю.

Для гипергеометрического уравнения

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]u' - \alpha\beta u = 0 \tag{3}$$

имеем

$$\left(\frac{\sigma'-\tau}{2}\right)^2 - \varkappa\sigma = \left[\frac{1-\gamma+(\alpha+\beta-1)z}{2}\right]^2 - \varkappa z(1-z).$$

Приравнивая нулю дискриминант этого квадратного трехчлена, получим следующие возможные значения $\varkappa$:

$$\varkappa_1 = (1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma), \quad \varkappa_2 = 0.$$

В случае, когда $\varkappa = (1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$, возможны следующие виды полинома $\pi(z)$ и функции $\varphi(z)$:

а) $\pi(z) = (1-\gamma)(1-z)$, $\varphi(z) = z^{1-\gamma}$;

б) $\pi(z) = (\alpha+\beta-\gamma)z$, $\varphi(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$.

После замены $u = \varphi(z)y$ при $\varphi(z) = z^{1-\gamma}$ приходим к уравнению

$$z(1-z)y'' + [2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)z]y' - \\ -(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)y = 0.$$

Это уравнение можно записать в каноническом виде:

$$z(1-z)y'' + [\gamma' - (\alpha'+\beta'+1)z]y' - \alpha'\beta' y = 0, \tag{4}$$

если положить $\alpha' = \alpha-\gamma+1$, $\beta' = \beta-\gamma+1$, $\gamma' = 2-\gamma$. Аналогичным образом после замены $u = \varphi(z)y$ при $\varphi(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ приходим к уравнению (4) при $\alpha' = \gamma-\alpha$, $\beta' = \gamma-\beta$, $\gamma' = \gamma$.

Пусть $u(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z)$ есть частное решение уравнения (3). Функция $y(z) = u(z)/\varphi(z)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению с параметрами α', β', γ'. Поэтому частным решением уравнения (3) будет также функция $u(z) = \varphi(z)f(\alpha', \beta', \gamma', z)$. В результате при $\varkappa = (1-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$ мы приходим к следующим частным решениям уравнения (3):

$$\begin{aligned} u_1(z) &= f(\alpha, \beta, \gamma, z), \\ u_2(z) &= z^{1-\gamma} f(\alpha-\gamma+1, \quad \beta-\gamma+1, \quad 2-\gamma, \ z), \\ u_3(z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \quad \gamma-\beta, \quad \gamma, \quad z). \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогичное преобразование, соответствующее $\varkappa = 0$, не представляет интереса, так как оно является результатом последовательного применения двух рассмотренных выше преобразований.

Уравнение (3) не меняется при одновременной замене α на β и β на α. Поэтому оно имеет также решение

$$u_4(z) = f(\beta, \ \alpha, \ \gamma, \ z). \tag{5a}$$

Подобным же образом для вырожденного гипергеометрического уравнения

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0 \tag{6}$$

по частному решению $u_1(z)=f(\alpha, \gamma, z)$ можно построить решения

$$u_2(z)=z^{1-\gamma}f(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z), \quad u_3(z)=e^z f(\gamma-\alpha, \gamma, -z). \tag{7}$$

Для уравнения Эрмита

$$u''-2zu'+2\nu u=0 \tag{8}$$

по частному решению $u_1(z)=f_\nu(z)$ можно построить решение

$$u_2(z)=e^{-z^2}f_{-\nu-1}(iz). \tag{9а}$$

Так как уравнение (8) не меняется при замене z на $-z$, то мы имеем также решения

$$u_3(z)=f_\nu(-z), \quad u_4(z)=e^{-z^2}f_{-\nu-1}(-iz). \tag{9б}$$

3. Гипергеометрическая и вырожденная гипергеометрическая функции. Перейдем к конкретному построению частных решений для уравнений (3), (6). Как было показано в § 3, уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(z)u''+\tau(z)u'+\lambda u=0$$

имеет частные решения вида

$$u(z)=\frac{C_\nu}{\rho(z)}\int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}ds. \tag{9}$$

Здесь $\rho(z)$ — решение дифференциального уравнения $(\sigma\rho)'=\tau\rho$, ν — корень уравнения $\lambda+\nu\tau'+(1/2)\nu(\nu-1)\sigma''=0$, а контур C выбирается из условия

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1, s_2}=0 \tag{10}$$

(s_1, s_2 — концы контура).

Чтобы упростить последующие рассуждения, построим частные решения уравнений (3), (6) при дополнительном предположении $z>0$. Кроме того, при построении решений уравнения (3) будем предполагать, что $z<1$.

Для уравнения (3)

$$\sigma(z)=z(1-z), \; \rho(z)=z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma},$$
$$\nu=-\alpha \text{ (или } \nu=-\beta);$$

для уравнения (6)

$$\sigma(z)=z, \quad \rho(z)=z^{\gamma-1}e^{-z}, \quad \nu=-\alpha.$$

Условие (10) для уравнения (3) принимает вид

$$\left.s^{\gamma-\alpha}(1-s)^{\beta-\gamma+1}(s-z)^{\alpha-2}\right|_{s_1, s_2}=0.$$

Этому условию можно удовлетворить, если при определенных ограничениях, наложенных на параметры α, β, γ, в качестве концов контура C выбрать точки $s=0$, 1, z, ∞. Для построения частных решений, имеющих простое поведение в окрестности точек $z=0,\ 1,\ \infty$, в качестве контуров C удобно выбрать прямые линии, соединяющие точки $s=0,\ 1,\ \infty$ с точкой $s=z$. Параметрическое представление этих контуров удобно взять в виде

$$\begin{aligned} &s=zt, && \operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>2,\\ &s=1-(1-z)t, && \operatorname{Re}\gamma<\operatorname{Re}\beta+1,\quad \operatorname{Re}\alpha>2,\\ &s=z/t, && \operatorname{Re}\beta>1,\quad \operatorname{Re}\alpha>2,\end{aligned}\tag{11}$$

где $0\leqslant t\leqslant 1$.

Аналогичным образом для решений уравнения (6) приходим к следующим видам контуров:

$$\begin{aligned} &s=zt, && \operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>2, && 0\leqslant t\leqslant 1,\\ &s=z(1+t), && \operatorname{Re}\alpha>2, && 0\leqslant t<\infty.\end{aligned}\tag{12}$$

Использование контура $s=zt$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ для уравнений (3) и (6) дает следующие частные решения, получаемые по формуле (9):

$$u_1(z)=f(\alpha,\beta,\gamma,z)=$$
$$=C(\alpha,\beta,\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt,$$

$$u_1(z)=f(\alpha,\gamma,z)=C(\alpha,\gamma)e^z\int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}e^{-zt}dt,$$
$$\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>2.$$

Нормировочные постоянные $C(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ и $C(\alpha,\ \gamma)$ удобно выбрать из условий

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 0)=f(\alpha,\ \gamma,\ 0)=1,$$

откуда

$$C(\alpha,\beta,\gamma)=C(\alpha,\gamma)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\mathrm{B}(u,\ v)$ — бета-функция (см. Дополнение А).

Более простые интегральные представления для решений уравнений (3), (6) получаются, если вместо решений $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ и $f(\alpha,\ \gamma,\ z)$ использовать решения $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}f(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z)$ и $e^zf(\gamma-\alpha,\ \gamma,\ -z)$. В результате при $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha+2$ приходим к следующим решениям уравнений (3), (6):

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt,\tag{13}$$

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}dt.\tag{14}$$

Функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ называется *гипергеометрической функцией*, а $F(\alpha, \gamma, z)$ — *вырожденной гипергеометрической функцией*.

Заметим, что

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = F(\alpha, \gamma, 0) = 1.$$

Выясним, на какую максимальную область значений аргумента z и параметров можно аналитически продолжить функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$ с помощью интегральных представлений (13), (14), опираясь на теорему об аналитичности интеграла, зависящего от параметра (см. теорему 2 из § 3).

Для определения области аналитичности необходимо найти область, в которой интеграл (13) будет равномерно сходиться относительно переменной z и соответствующих параметров.

Имеем

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta} = t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}\psi_\delta(t, z),$$

где $\psi_\delta(t, z) = t^{\alpha-\delta}(1-t)^{\gamma-\alpha-\delta}(1-zt)^{-\beta}$ $(\delta > 0)$. Функция $\psi'_\delta(t, z)$ непрерывна по совокупности переменных в замкнутой области $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\delta \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant N$, $\delta \leqslant \operatorname{Re}(\gamma-\alpha) \leqslant N$, $|\beta| \leqslant N$, $|z| \leqslant N$, $|1-zt| \geqslant \delta$ при $t \in [0, 1]$. Поэтому она ограничена в рассматриваемой области, т. е. существует такая постоянная C, что $|\psi_\delta(t, z)| \leqslant C$.

Следовательно, в этой области

$$|t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}| \leqslant Ct^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}.$$

Так как интеграл $\int\limits_0^1 t^{\delta-1}(1-t)^{\delta-1}dt$ сходится, то интеграл (13), определяющий функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, сходится в этой области равномерно и является поэтому аналитической функцией каждой из переменных в силу аналитичности функции $\Psi_\delta(t, z)$ относительно z и параметров α, β, γ.

Ввиду произвола в выборе постоянных δ и N функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, если в комплексной плоскости переменной z сделать разрез, соответствующий таким значениям z, для которых $1 - zt = 0$ при $t \in [0, 1]$. Это соответствует разрезу в плоскости переменной z вдоль вещественной оси при $z \geqslant 1$.

Аналогично можно доказать, что функция $F(\alpha, \gamma, z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ и произвольных значениях z.

Для аналитического продолжения функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$ на более широкую область изменения параметров удобно опираться на рекуррентные соотношения для этих функций.

4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$. С помощью интегральных представлений (13), (14) получаем следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z),$$
$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1,z). \tag{15}$$

Функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \gamma, z)$ удовлетворяют целому ряду различных рекуррентных соотношений. Например, используя формулы дифференцирования (15) и дифференциальные уравнения (3), (6), приходим к рекуррентным соотношениям

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,z)=(\alpha+1)(\beta+1)z(1-z)\varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma+2,z)+$$
$$+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z), \tag{16}$$

$$\varphi(\alpha,\gamma,z)=(\alpha+1)z\varphi(\alpha+2,\gamma+2,z)+(\gamma-z)\varphi(\alpha+1,\gamma+1,z). \tag{17}$$

Здесь

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z), \tag{18}$$

$$\varphi(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\gamma,z). \tag{19}$$

Рассмотрим общий метод получения рекуррентных соотношений для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. С помощью метода, изложенного в § 4, можно показать, что между любыми тремя функциями $F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z)$ $(i=1, 2, 3)$ в случае, когда разности $\alpha_i-\alpha_k$, $\beta_i-\beta_k$, $\gamma_i-\gamma_k$ — целые числа, существует линейное соотношение вида

$$\sum_{i=1}^{3}C_i(z)F(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,z)=0,$$

в котором коэффициенты $C_i(z)$ — полиномы.

Для доказательства рассмотрим $\sum\limits_i C_i(z)F(\alpha_i, \beta_i,\gamma_i,z)$. Покажем, что коэффициенты $C_i=C_i(z)$ можно выбрать таким образом, чтобы рассматриваемая комбинация была равна нулю. При любом фиксированном значении z, используя интегральное представление (13), имеем

$$\sum_i C_iF(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,z)=\int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0}P(t)\,dt.$$

Здесь α_0, $\gamma_0-\alpha_0$, $-\beta_0$ суть те из значений α_i, $\gamma_i-\alpha_i$, $-\beta_i$, которые имеют наименьшую вещественную часть; $P(t)$ — некоторый полином. Коэффициенты $C_i=C_i(z)$ выберем из условия

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0}P(t)=$$
$$=\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0}Q(t)\right], \tag{20}$$

где $Q(t)$ — полином. В результате получим

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0} Q(t)\Big|_0^1.$$

Так как $\operatorname{Re}(\gamma_0-\alpha_0)=\min\operatorname{Re}(\gamma_i-\alpha_i)>0$, $\operatorname{Re}\alpha_0=\min\operatorname{Re}\alpha_i>0$, то подстановка обращается в нуль, и при подобранных таким способом коэффициентах $C_i=C_i(z)$ будет иметь место линейное соотношение

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z) = 0.$$

Проводя те же рассуждения, что и в § 4, нетрудно убедиться в том, что коэффициенты $C_i(z)$ $(i=1, 2, 3)$ с точностью до общего множителя являются полиномами.

Аналогичным образом выводятся рекуррентные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций $F(\alpha, \gamma, z)$ с помощью (14):

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1} e^{zt} P(t)\, dt,$$

где $P(t)$ — некоторый полином. Коэффициенты $C_i=C_i(z)$ выберем из условия

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}e^{zt}P(t) = \frac{d}{dt}\left[t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}e^{zt}Q(t)\right], \quad (21)$$

где $Q(t)$ — полином. В результате получим искомое соотношение, так как

$$\sum_i C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z) = t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}e^{zt}Q(t)\Big|_0^1 = 0$$

при $\operatorname{Re}\gamma_i > \operatorname{Re}\alpha_i > 0$.

В виде примера выведем рекуррентное соотношение, связывающее функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $F(\alpha, \beta, \gamma\pm 1, z)$. В этом случае $\gamma_1=\gamma-1$, $\gamma_2=\gamma$, $\gamma_3=\gamma+1$, $\alpha_0=\alpha$, $\beta_0=\beta$, $\gamma_0-\alpha_0=\gamma-\alpha-1$. С точностью до множителя, не зависящего от t, полином $P(t)$ имеет вид

$$P(t) = C_1(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1) + C_2(\gamma-1)(\gamma-\alpha)(1-t) + \\ + C_2\gamma(\gamma-1)(1-t)^2.$$

Степень полинома $Q(t)$ равна нулю. Поэтому можно положить $Q(t)=1$. В результате (20) примет вид

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-2}(1-zt)^{-\beta}P(t) = \frac{d}{dt}\left[t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta+1}\right].$$

Отсюда

$$P(t) = \alpha(1-zt)(1-t) - (\gamma-\alpha-1)t(1-zt) + z(\beta-1)t(1-t).$$

Полагая $t=1$, получим

$$C_1 = -\frac{1-z}{\gamma-\alpha}.$$

Приравнивая коэффициенты при t^2 и t, находим

$$C_2 = \frac{(\gamma-1)+(\alpha+\beta-2\gamma+1)z}{(\gamma-1)(\gamma-\alpha)}, \quad C_3 = \frac{(\gamma-\beta)z}{\gamma(\gamma-1)}.$$

В результате приходим к соотношению

$$\begin{aligned}(1-z)\varphi(\alpha, \beta, \gamma-1, z) = \\ &= [(\gamma-1)+(\alpha+\beta-2\gamma+1)z]\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) + \\ &+ (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z\varphi(\alpha, \beta, \gamma+1, z),\end{aligned} \qquad (22)$$

где функция $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ определяется формулой (18). Аналогично можно получить соотношение

$$\varphi(\alpha, \gamma-1, z) = (\gamma-1+z)\varphi(\alpha, \gamma, z) - (\gamma-\alpha)z\varphi(\alpha, \gamma+1, z), \qquad (23)$$

где функция $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ определяется формулой (19).

Рекуррентные соотношения (16), (17), (22), (23) дают возможность аналитически продолжить функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ на произвольные значения параметров α, β, γ. Действительно, в соотношения (16), (17) входят функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $\varphi(\alpha, \gamma, z)$, для которых разность $\gamma-\alpha$ сохраняется. Поэтому, последовательно уменьшая в (16), (17) значения α на единицу, можно аналитически продолжить функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ и $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ на произвольные значения α при условии $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha) > 0$. От этого условия можно избавиться, если аналитически продолжить эти функции с помощью соотношений (21), (22), последовательно уменьшая в них значения γ на единицу. В результате получаем, что функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ будут аналитическими функциями при произвольных значениях параметров.

В силу формул дифференцирования (15) имеем

$$\frac{d}{dz}\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \alpha\beta\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z),$$

$$\frac{d}{dz}\varphi(\alpha, \gamma, z) = \alpha\varphi(\alpha+1, \gamma+1, z).$$

Из этих соотношений вытекает, что производные от функций $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ будут аналитическими функциями переменной z и параметров в той же области, что и сами функции. В этой же области по принципу аналитического продолжения функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям (3) и (6) соответственно.

Метод получения рекуррентных соотношений для функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ был рассмотрен при некоторых ограничениях на параметры. С помощью принципа аналитического продолжения полученные рекуррентные соотношения можно продолжить на более широкую область изменения параметров.

5. Совокупность решений гипергеометрического и вырождённого гипергеометрического уравнения. Мы получили некоторые решения уравнений (3), (6) с помощью (9), используя контур $s = zt$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Рассмотрим решения уравнений (3), (6), соответствующие другим выборам контура C.

Рассмотрение других контуров для гипергеометрического уравнения приводит к следующим парам линейно независимых решений:

1) контур $s=1-(1-z)t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,\,1-z),\\ u_2(z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\,\gamma-\beta,\,\gamma-\alpha-\beta+1,\,1-z); \end{aligned} \tag{24}$$

2) контур $s=z/t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= z^{-\alpha}F(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1,\,1/z),\\ u_2(z) &= z^{-\beta}F(\beta,\,\beta-\gamma+1,\,\beta-\alpha+1,\,1/z). \end{aligned} \tag{25}$$

Для вырожденного гипергеометрического уравнения контур $s=z(1+t)$ $(0\leqslant t\leqslant\infty)$ приводит к решению

$$u_1(z)=G(\alpha,\gamma,z)=C(\alpha,\gamma)\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}dt.$$

Функция $G(\alpha,\ \gamma,\ z)$ называется *вырожденной гипергеометрической функцией второго рода.* Интеграл, определяющий функцию $G(\alpha,\ \gamma,\ z)$, является интегралом Лапласа, и поэтому по лемме Ватсона (см. Дополнение Б)

$$\lim_{z\to\infty} z^{\alpha}G(\alpha,\gamma,z)=C(\alpha,\gamma)\,\Gamma(\alpha).$$

Удобно выбрать $C(\alpha,\ \gamma)=1/\Gamma(\alpha)$, чтобы рассмотренный предел равнялся единице. Отсюда

$$G(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}dt, \qquad \operatorname{Re}\alpha>0,\quad |\arg z|<\pi/2. \tag{26}$$

По решению $u_1(z)=G(\alpha,\ \gamma,\ z)$, полагая в (7) $f(\alpha,\ \gamma,\ z)=G(\alpha,\ \gamma,\ z)$, можно построить второе линейно независимое решение

$$u_2(z)=e^zG(\gamma-\alpha,\ \gamma,\ -z).$$

Интеграл, определяющий функцию $G(\alpha,\ \gamma,\ z)$, является интегралом Лапласа, рассмотренным в примере к теореме 1 из Дополнения Б. В соответствии с результатами, полученными в этом примере, функция $G(\alpha,\ \gamma,\ z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $|\arg z|<3\pi/2$, $z\neq 0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$. Для этой функции справедливо следующее асимптотическое представление при $z\to\infty$, когда $\operatorname{Re}\alpha>0$, $|\arg z|\leqslant 3\pi/2-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$:

$$G(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\,z^{\alpha}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\,\Gamma(\gamma-\alpha-k)\,z^k}+O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right]. \tag{27}$$

Для однозначности функции $G(\alpha,\ \gamma,\ z)$ достаточно сделать разрез вдоль вещественной оси при $z<0$ и считать, что $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

Асимптотическое представление (27) остается справедливым в указанной области. От ограничения $\operatorname{Re}\alpha > 0$ можно избавиться следующим образом. Из интегрального представления (26) вытекает следующая формула дифференцирования:

$$\frac{dG(\alpha, \gamma, z)}{dz} = -\alpha G(\alpha+1, \gamma+1, z). \tag{28}$$

Подставляя формулы дифференцирования в дифференциальное уравнение (6), для $G(\alpha, \gamma, z)$ приходим к следующему рекуррентному соотношению:

$$G(\alpha, \gamma, z) = (\alpha+1)zG(\alpha+2, \gamma+2, z) - \\ -(\gamma - z)G(\alpha+1, \gamma+1, z). \tag{29}$$

Последовательно уменьшая в этом соотношении α на единицу, получим аналитическое продолжение функции $G(\alpha, \gamma, z)$ при произвольных значениях α. Можно проверить, что асимптотическое представление (27) при этом сохраняется. С помощью формул дифференцирования и принципа аналитического продолжения можно убедиться в том, что функция $G(\alpha, \gamma, z)$ является решением уравнения (6) при любых значениях параметров. Заменяя в интегральном представлении (26) t на $-t$, можно получить представление, аналогичное интегральному представлению (14) для $F(\alpha, \gamma, z)$:

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt}\,dt.$$

Полученное представление отличается от интегрального представления для $F(\alpha, \gamma, z)$ лишь множителем и пределами интегрирования. Повторяя рассуждения п. 4, легко убедиться в том, что функции $G(\alpha, \gamma, z)$, $e^{i\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha, \gamma, z)$ будут удовлетворять одним и тем же рекуррентным соотношениям.

6. Решения уравнения Эрмита. Уравнение Эрмита (8) является частным случаем уравнения гипергеометрического типа при $\sigma(z) = 1$, $\tau(z) = -2z$. Найдем частное решение этого уравнения по формуле (9). В данном случае $\rho(z) = e^{-z^2}$, а условию (10) при $\operatorname{Re}\nu < -2$ удовлетворяет контур $s = z + t$ $(0 \leqslant t < \infty)$. В результате приходим к следующему решению уравнения (8):

$$u(z) = H_\nu(z) = C_\nu \int_0^\infty \exp\{-t^2 - 2zt\}\, t^{-\nu-1}\,dt.$$

Функция $H_\nu(z)$ при $C_\nu = 1/\Gamma(-\nu)$ называется *функцией Эрмита* *).

*) Нормировочный коэффициент C_ν выбран таким образом, чтобы аналитическое продолжение функции $H_\nu(z)$ по параметру ν совпадало с полиномом Эрмита $H_n(z)$ при $\nu = n$ (см. § 22).

Для определения области аналитичности функции

$$H_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int\limits_0^\infty \exp\{-t^2-2zt\}\,t^{-\nu-1}dt \tag{30}$$

необходимо найти область, в которой интеграл равномерно сходится по z и ν. Равномерная сходимость интеграла имеет место при $\operatorname{Re} z\geqslant -N$, $\delta-1\leqslant -\operatorname{Re}\nu-1\leqslant N$ $(N>0,\ \delta>0)$ в силу оценки

$$|\exp\{-t^2-2zt\}t^{-\nu-1}|<\exp\{-t^2+2Nt\}(t^{\delta-1}+t^N)$$

и сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty \exp\{-t^2+2Nt\}\left(t^{\delta-1}+t^N\right)dt.$$

Ввиду произвольности постоянных N и δ функция $H_\nu(z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $\operatorname{Re}\nu<0$. От ограничения $\operatorname{Re}\nu<0$ можно избавиться рассмотренным ранее способом. Из интегрального представления (30) можно получить следующую формулу дифференцирования:

$$\frac{dH_\nu(z)}{dz}=2\nu H_{\nu-1}(z). \tag{31}$$

Подставляя формулу дифференцирования (31) в дифференциальное уравнение (8), для $H_\nu(z)$ получим рекуррентное соотношение

$$H_\nu(z)=2zH_{\nu-1}(z)-(2\nu-z)H_{\nu-2}(z). \tag{32}$$

Увеличивая в (32) последовательно значения ν на единицу, получим аналитическое продолжение функции $H_\nu(z)$ при произвольных значениях ν.

С помощью формулы дифференцирования (31) и принципа аналитического продолжения можно убедиться в том, что функция $H_\nu(z)$ является решением уравнения (8) при любых значениях ν.

В заключение заметим, что с помощью (9) и (9а) при $f_\nu(z)=H_\nu(z)$ получим также следующие решения уравнения (8):

$$\begin{gathered} u_2(z)=H_\nu(-z),\quad u_3(z)=e^{-z^2}H_{-\nu-1}(iz),\\ u_4(z)=e^{-z^2}H_{-\nu-1}(-iz). \end{gathered} \tag{33}$$

§ 21. Основные свойства функций гипергеометрического типа

Найденные выше интегральные представления для функций гипергеометрического типа дают возможность получить основные свойства этих функций: разложения в степенные ряды, функциональные соотношения, асимптотические представления. При изучении различных свойств функций гипергеометрического типа мы широко будем использовать результаты гл. I.