Для определения области аналитичности функции

$$H_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty \exp\{-t^2-2zt\}\,t^{-\nu-1}dt \tag{30}$$

необходимо найти область, в которой интеграл равномерно сходится по z и ν. Равномерная сходимость интеграла имеет место при $\operatorname{Re} z\geqslant -N$, $\delta-1\leqslant -\operatorname{Re}\nu-1\leqslant N$ $(N>0,\ \delta>0)$ в силу оценки

$$|\exp\{-t^2-2zt\}t^{-\nu-1}|<\exp\{-t^2+2Nt\}(t^{\delta-1}+t^N)$$

и сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \exp\{-t^2+2Nt\}\left(t^{\delta-1}+t^N\right)dt.$$

Ввиду произвольности постоянных N и δ функция $H_\nu(z)$ будет аналитической функцией каждой из переменных при $\operatorname{Re}\nu<0$. От ограничения $\operatorname{Re}\nu<0$ можно избавиться рассмотренным ранее способом. Из интегрального представления (30) можно получить следующую формулу дифференцирования:

$$\frac{dH_\nu(z)}{dz}=2\nu H_{\nu-1}(z). \tag{31}$$

Подставляя формулу дифференцирования (31) в дифференциальное уравнение (8), для $H_\nu(z)$ получим рекуррентное соотношение

$$H_\nu(z)=2zH_{\nu-1}(z)-(2\nu-z)H_{\nu-2}(z). \tag{32}$$

Увеличивая в (32) последовательно значения ν на единицу, получим аналитическое продолжение функции $H_\nu(z)$ при произвольных значениях ν.

С помощью формулы дифференцирования (31) и принципа аналитического продолжения можно убедиться в том, что функция $H_\nu(z)$ является решением уравнения (8) при любых значениях ν.

В заключение заметим, что с помощью (9) и (9а) при $f_\nu(z)=H_\nu(z)$ получим также следующие решения уравнения (8):

$$u_2(z)=H_\nu(-z),\quad u_3(z)=e^{-z^2}H_{-\nu-1}(iz), \\ u_4(z)=e^{-z^2}H_{-\nu-1}(-iz). \tag{33}$$

§ 21. Основные свойства функций гипергеометрического типа

Найденные выше интегральные представления для функций гипергеометрического типа дают возможность получить основные свойства этих функций: разложения в степенные ряды, функциональные соотношения, асимптотические представления. При изучении различных свойств функций гипергеометрического типа мы широко будем использовать результаты гл. I.

1. Разложения в степенные ряды. Разложения в ряды по степеням z функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ можно получить, если воспользоваться интегральными представлениями (20.13), (20.14) и разложениями в ряды функций $(1-zt)^{-\beta}$, e^{zt}:

$$(1-zt)^{-\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n (zt)^n}{n!}, \qquad |zt|<1, \tag{1}$$

$$e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!},$$

где $(\beta)_0=1$, $(\beta)_n=\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)=\Gamma(\beta+n)/\Gamma(\beta)$.

Если $|z|<1$, то ряд (1) равномерно сходится при $0\leqslant t\leqslant 1$ и в интегральном представлении можно поменять местами порядок суммирования и интегрирования. При $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0$ имеем

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}z^n\int_0^1 t^{n+\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta)_n\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(n+\gamma)}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}z^n. \tag{2}$$

Аналогично, для $F(\alpha, \gamma, z)$ при любых значениях z получаем

$$F(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!}z^n. \tag{3}$$

Ряд (3) для функции $F(\alpha, \gamma, z)$ отличается от ряда (2) для функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ лишь отсутствием множителя $(\beta)_n$ в каждом члене ряда. Ряд (2) называется *гипергеометрическим рядом*, а (3) — *вырожденным гипергеометрическим рядом.*

По признаку Даламбера (см. замечание к теореме Вейерштрасса в § 15) ряды (2), (3) сходятся равномерно по всем переменным в любой замкнутой области их изменения, не содержащей в себе целых отрицательных и нулевых значений γ, причем для ряда (2) следует потребовать дополнительного ограничения $|z|\leqslant q<1$. Поэтому эти ряды по теореме Вейерштрасса (см. § 15, п. 4) являются аналитическими функциями каждой из переменных при $\gamma\neq -k$ $(k=0, 1, \ldots)$ и при дополнительном ограничении $|z|<1$ для ряда (2). По принципу аналитического продолжения разложения (2), (3) остаются справедливыми во всей указанной области изменения переменных.

Если $\alpha=-m$ $(m=0, 1, \ldots)$, то гипергеометрический ряд (2) обрывается и функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ будет полиномом степени m относительно z. Этот полином будет иметь смысл и при $\gamma=-k$, если $m\leqslant k$, так как $(\gamma)_n=(-k)_n\neq 0$ при $n\leqslant m$. Так как $F(\alpha, \beta, \gamma, z)=F(\beta, \alpha, \gamma, z)$, то очевидно, что тот же факт имеет место и в случае, когда $\beta=-m$. Аналогичные соображения справедливы и для (3).

Разложения в ряды вырожденной гипергеометрической функции второго рода $G(\alpha, \gamma, z)$ и функции Эрмита $H_\nu(z)$ могут быть получены с помощью функциональных соотношений, выражающих эти функции через функции $F(\alpha, \gamma, z)$ (см. п. 2).

При решении некоторых задач используются обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z)$, разложения в ряды которых является обобщением разложений (2), (3):

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \cdots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Ряды для этих функций могут сходиться лишь при $p \leqslant q+1$, причем при $p = q+1$ ряды сходятся лишь при $|z| < 1$. В указанных обозначениях

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z),$$
$$F(\alpha, \gamma, z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z).$$

2. Функциональные соотношения и асимптотические представления. Гипергеометрические функции удовлетворяют целому ряду функциональных соотношений, связывающих гипергеометрические функции от различных значений переменных. В § 20 для гипергеометрического уравнения было получено несколько пар линейно независимых решений, выражающихся через гипергеометрические функции от аргументов z, $1-z$, $1/z$. Так как гипергеометрическое уравнение может иметь не больше двух линейно независимых решений, то любое из решений $u(z)$ может быть представлено в виде линейной комбинации произвольной пары из этих линейно независимых решений $u_1(z)$, $u_2(z)$:

$$u(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z). \tag{4}$$

Отметим простое свойство коэффициентов C_1, C_2: *если в некоторой области изменения величин α, β, γ, z функции $u(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$ и их производные по z являются аналитическими функциями каждой из переменных, то коэффициенты $C_1 = C_1(\alpha, \beta, \gamma)$, $C_2 = C_2(\alpha, \beta, \gamma)$ будут также аналитическими функциями каждой из переменных в этой области.*

Это свойство вытекает из явного вида коэффициентов C_1, C_2:

$$C_1 = \frac{W(u, u_2)}{W(u_1, u_2)}, \quad C_2 = \frac{W(u_1, u)}{W(u_1, u_2)}, \tag{5}$$

где $W(f, g) = f(z)g'(z) - f'(z)g(z)$ — вронскиан, который для линейно независимых решений не равен нулю. Поэтому для нахождения C_1, C_2 достаточно найти их выражения при некоторых дополнительных ограничениях на параметры, а затем воспользоваться принципом аналитического продолжения.

1°. Пусть $u(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Для определения коэффициентов C_1, C_2 в разложении (4) мы будем пользоваться значениями функции $u(z)$ в опорных точках $z=0,\ 1,\ \infty$. Из интегрального представления (20.13) при $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta < 0$ имеем

$$\lim_{z\to 1} F(\alpha,\beta,\gamma,z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,z)}{(-z)^{-\beta}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

где $|\arg(-z)| < \pi$. Кроме того, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 0)=1$.

Получим сначала функциональные соотношения между гипергеометрическими функциями, зависящими от одной и той же переменной z. В силу различного поведения при $z\to 0$ решения $u_1(z)=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ и $u_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z)$ уравнения (20.3) линейно независимы. Поэтому решения $u_3(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z)$, $u_4(z)=F(\beta,\ \alpha,\ \gamma,\ z)$ являются линейными комбинациями решений $u_1(z)$ и $u_2(z)$. Если $\operatorname{Re}\gamma > 1$, то коэффициенты этих линейных комбинаций легко найти, опираясь на поведение решений $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$, $u_4(z)$ при $z\to 0$. В результате при $\operatorname{Re}\gamma > 1$ получаем функциональные соотношения

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,z), \tag{6}$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = F(\beta,\alpha,\gamma,z). \tag{7}$$

Аналогично можно получить соотношения

$$F(\alpha,\ \gamma,\ z) = e^z F(\gamma-\alpha,\ \gamma,\ -z), \tag{8}$$

$$G(\alpha,\ \gamma,\ z) = z^{1-\gamma}G(\alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z). \tag{8a}$$

По принципу аналитического продолжения функциональные соотношения (6)—(8а) остаются справедливыми при любых значениях параметров, для которых функции $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$, $F(\alpha,\ \gamma,\ z)$, $G(\alpha,\ \gamma,\ z)$ аналитичны.

Получим теперь разложения функции $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ по гипергеометрическим функциям от переменных $1-z$, $1/z$:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = C_1(\alpha,\beta,\gamma)F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z) +$$

$$+ C_2(\alpha,\beta,\gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z), \tag{9}$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = D_1(\alpha,\beta,\gamma)(-z)^{-\alpha}F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,1/z) +$$

$$+ D_2(\alpha,\beta,\gamma)(-z)^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,1/z). \tag{10}$$

Если $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ и $\operatorname{Re}\beta < 0$, то, переходя к пределу в (9) при $z\to 1$, а в (10) при $z\to\infty$, находим

$$C_1(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},\quad D_2(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Для определения коэффициентов $C_2(\alpha, \beta, \gamma)$, $D_1(\alpha, \beta, \gamma)$ достаточно воспользоваться в (9) функциональным соотношением (6), а в (10) соотношением (7). Это дает

$$C_2(\alpha, \beta, \gamma) = C_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)},$$

$$D_1(\alpha, \beta, \gamma) = D_2(\beta, \alpha, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \alpha)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) +\\ + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \times\\ \times F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &=\\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{z}\right) +\\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{z}\right),\\ &\qquad |\arg(-z)| < \pi. \end{aligned} \tag{12}$$

Эти соотношения по принципу аналитического продолжения справедливы при любых значениях α, β, γ.

С помощью разложений (11), (12) легко найти поведение функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ при $z \to 1$ и $z \to \infty$, если использовать ряды для гипергеометрических функций от переменных $1 - z$, $1/z$. Комбинируя соотношения (11), (12) и (6), можно, очевидно, получить еще целый ряд других функциональных соотношений, дающих возможность выразить $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ через гипергеометрические функции переменных $1/(1 - z)$, $1 - 1/z$, $1/(1 - 1/z) = z/(z - 1)$ (см. Основные формулы).

2°. Аналогичным образом можно получить функциональные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций. Имеем

$$\begin{aligned} G(\alpha, \gamma, z) &=\\ &= C_1(\alpha, \gamma) F(\alpha, \gamma, z) + C_2(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \end{aligned} \tag{13}$$

Для нахождения коэффициента $C_2(\alpha, \gamma)$ предположим временно, что $\operatorname{Re}\gamma - 1 > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $z > 0$ и перейдем в равенствах (13) и (20.26) к пределу при $z \to 0$. Это дает

$$\begin{aligned} C_2(\alpha, \gamma) &= \lim_{z \to 0} z^{\gamma - 1} G(\alpha, \gamma, z) =\\ &= \lim_{z \to 0} \frac{z^{\gamma - 1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha - 1} (1 + t)^{\gamma - \alpha - 1} dt =\\ &= \lim_{z \to 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha - 1} (z + s)^{\gamma - \alpha - 1} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\gamma - 2} ds = \frac{\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Для определения коэффициента $C_1(\alpha, \gamma)$ достаточно воспользоваться соотношением

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z).$$

Это дает

$$C_1(\alpha, \gamma) = C_2(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma-1)}.$$

Таким образом,

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z). \quad (14)$$

Это соотношение дает возможность получить разложение функции $G(\alpha, \gamma, z)$ в ряд по степеням z (см. (3)). С помощью равенств (14), (8) можно получить представление функции $F(\alpha, \gamma, z)$ в виде линейной комбинации функций $G(\alpha, \gamma, z)$ и $e^z G(\gamma-\alpha, \gamma, -z)$. Имеем

$$e^z G(\gamma-\alpha, \gamma, -z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} e^z F(\gamma-\alpha, \gamma, -z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{1-\gamma} e^z F(1-\alpha, 2-\gamma, -z) =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} F(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z), \quad (15)$$

где $0 < \arg(-z) \leqslant \pi$. Отсюда следует, что

$$(-z)^{1-\gamma} = z^{1-\gamma} e^{\mp i\pi(1-\lambda)} = -z^{1-\gamma} e^{\pm i\pi\gamma} \quad (16)$$

при условии, что $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ (знак плюс соответствует $0 < \arg z \leqslant \pi$).

Исключая из (14) и (15) функцию $z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)$ и используя формулу дополнения для гамма-функции, приходим к функциональному соотношению

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} G(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pm i\pi(\alpha-\gamma)} e^z G(\gamma-\alpha, \gamma, -z) \quad (17)$$

(знак плюс соответствует $0 < \arg z \leqslant \pi$, знак минус соответствует $-\pi < \arg z \leqslant 0$). Это соотношение дает возможность получить асимптотическое представление функции $F(\alpha, \gamma, z)$ при $z \to \infty$ (см. (20.27)):

$$F(\alpha, \gamma, z) = \Gamma(\gamma)(-z)^{-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha)_k}{k!\,\Gamma(\gamma-\alpha-k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right] + \Gamma(\gamma) e^z z^{\alpha-\gamma} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\gamma-\alpha)_k}{k!\,\Gamma(\gamma-k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^n}\right) \right]. \quad (18)$$

Здесь при вычислении $(-z)^{-\alpha}$ и $z^{\alpha-\gamma}$ следует соответственно считать $-\pi < \arg(-z) \leqslant \pi$ и $-\pi < \arg z \leqslant \pi$.

3°. Установим теперь соотношения, связывающие решения уравнения Эрмита $H_\nu(\pm z)$ и $e^{-z^2}H_{-\nu-1}(\pm iz)$. Для этого воспользуемся формулами (4), (5). Вронскианы, входящие в (5), удобно вычислять при $z=0$, опираясь на значения $H_\nu(0)$, $H'_\nu(0)$. Эти значения легко вычисляются при $\operatorname{Re}\nu<0$ с помощью (20.30) и формулы удвоения для гамма-функции:

$$H_\nu(0)=\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma((1-\nu)/2)},\qquad H'_\nu(0)=\frac{-2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)}. \tag{19}$$

В результате приходим к следующим функциональным соотношениям для функции Эрмита:

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}e^{z^2}\left[e^{i\pi\nu/2}H_{-\nu-1}(iz)+e^{-i\pi\nu/2}H_{-\nu-1}(-iz)\right],$$

$$H_\nu(z)=e^{i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}\exp\left\{z^2+i\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\}H_{-\nu-1}(-iz),$$

$$H_\nu(z)=e^{-i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}\exp\left\{z^2-i\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\}H_{-\nu-1}(iz).$$

По принципу аналитического продолжения эти формулы остаются справедливыми при любых значениях ν.

4°. Можно получить также другой класс функциональных соотношений, связанный с симметрией дифференциального уравнения относительно замены z на $-z$. Предположим, что уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(z)u''+\tau(z)u'+\lambda u=0 \tag{20}$$

сохраняет свой вид при замене z на $-z$, т. е.

$$\sigma(-z)=\sigma(z),\quad \tau(-z)=-\tau(z).$$

В этом случае

$$\sigma(z)=\sigma_1(z^2),\quad \tau(z)=\mu z,$$

где $\sigma_1(s)$ — полином не выше первой степени относительно s, μ — постоянная. После замены $s=z^2$, $u(z)=v(s)$ уравнение (20) примет вид

$$4s\sigma_1(s)v''+2[\sigma_1(s)+\mu s]v'+\lambda v=0. \tag{21}$$

Это уравнение является по-прежнему уравнением гипергеометрического типа. Поэтому любое решение $u(z)$ уравнения (20) можно представить в виде линейной комбинации любых двух линейно независимых решений $v_1(s)$, $v_2(s)$ уравнения (21). В результате приходим к функциональным соотношениям, связывающим функции гипергеометрического типа от переменной z с функциями гипергеометрического типа от переменной $s=z^2$.

Рассмотрим несколько характерных примеров.

Примеры. 1. Пусть $u(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-z^2)u''-(\alpha+\beta+1)zu'-\alpha\beta u=0,$$

которое не меняется при замене z на $-z$. Если заменой

$t=(1+z)/2$ привести это уравнение к каноническому виду, то нетрудно убедиться, что решением уравнения будет функция

$$u_1(z)=F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{1+z}{2}\right).$$

С другой стороны, после замены $s=z^2$, $u(z)=v(s)$ приходим к уравнению

$$s(1-s)v''+\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta+2}{2}s\right)v'-\frac{\alpha\beta}{4}v=0,$$

решения которого можно выразить через гипергеометрические функции от переменных s, $1-s$, $1/s$ и т. д. Так как гипергеометрические функции $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ имеют простое поведение при $z\to 0$, то естественно $u_1(z)$ представить в виде линейной комбинации функций от переменной $1-s=1-z^2$ и определить коэффициенты линейной комбинации, используя поведение функции $u_1(z)$ при $z\to -1$. В соответствии с (20.24) имеем

$$F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{1+z}{2}\right)=c_1F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},1-z^2\right)+$$
$$+c_2(1-z^2)^{(1-\alpha-\beta)/2}F\left(\frac{1-\alpha}{2},\frac{1-\beta}{2},\frac{3-\alpha-\beta}{2},1-z^2\right).$$

Если $\alpha+\beta>1$, то из этого соотношения при $z\to-1$ получим $c_2=0$, $c_1=1$, т. е.

$$F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{1+z}{2}\right)=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},1-z^2\right),$$

что равносильно равенству

$$F\left(2\alpha,2\beta,\alpha+\beta+\frac{1}{2},t\right)=F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\frac{1}{2},4t(1-t)\right).$$

По принципу аналитического продолжения это соотношение остается справедливым при любых значениях α, β.

2. Рассмотрим уравнение для функции Эрмита $u=H_\nu(z)$

$$u''-2zu'+2\nu u=0.$$

Это уравнение не меняется при замене z на $-z$. Полагая $s=z^2$, $u(z)=v(s)$, приходим к уравнению

$$sv''+\left(\frac{1}{2}-s\right)v'+\frac{\nu}{2}v=0,$$

решения которого можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции:

$$v(s)=c_1F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},s\right)+c_2s^{1/2}F\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2},s\right).$$

Отсюда

$$H_\nu(z)=c_1F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},z^2\right)+c_2zF\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2},z^2\right).$$

Легко видеть, что

$$c_1 = H_\nu(0), \quad c_2 = H'_\nu(0).$$

Поэтому, используя (19), приходим к следующему соотношению:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma((1-\nu)/2)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) - \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)} zF\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right). \tag{22}$$

С помощью этого соотношения и разложения (3) можно получить разложение в степенной ряд функции Эрмита $H_\nu(z)$.

Если $-\pi/2 < \arg z \leqslant \pi/2$, то (22) с помощью (14) можно переписать в виде

$$H_\nu(z) = 2^\nu G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right). \tag{23}$$

Функциональные соотношения (22), (23) дают возможность получить асимптотическое представление для функции Эрмита с помощью рассмотренных выше асимптотических представлений для вырожденных гипергеометрических функций $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$. В частности, при $-\pi/2 < \arg z \leqslant \pi/2$

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu[1 + O(1/z^2)]. \tag{24}$$

Все полученные функциональные соотношения могут терять смысл при некоторых значениях параметров, когда они содержат функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ при $\gamma = -n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. В этих случаях вместо функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$ следует использовать функции

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$$

и раскрывать неопределенности по правилу Лопиталя при $\gamma \to -n$ таким же образом, как это было проделано для цилиндрических функций $H_\nu^{(1,2)}(z)$ при $\nu = n$ (см. § 15, п. 4).

3. Рассмотрим в качестве особого случая функциональное соотношение (14) при $\gamma = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Перейдем в нем от $F(\alpha, \gamma, z)$ к $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ и воспользуемся формулой дополнения для гамма-функции (см. Дополнение А)

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} \varphi(\alpha - \gamma + 1, 2-\gamma, z)\right]. \tag{25}$$

Значение $\gamma = n$ в правой части этого равенства является устранимой особой точкой. Перейдем в (25) к пределу при $\gamma \to n$.

Вычисляя пределы по правилу Лопиталя, получим

$$G(\alpha, n, z) = (-1)^n \left\{ \frac{\partial}{\partial\gamma} \left[\frac{\varphi(\alpha, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left[z^{1-\gamma} \varphi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z) \right] \right\} \Bigg|_{\gamma=n}.$$

Если воспользоваться разложением в ряд по степеням z для функции $\varphi(\alpha, \gamma, z)$, то отсюда можно вывести соответствующее разложение для $G(\alpha, n, z)$:

$$G(\alpha, n, z) =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{k!\,\Gamma(n+k)\,\Gamma(\alpha-n+1)} [\psi(\alpha-n+1) - \psi(n+k)] +$$

$$+ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha-n+1)_k z^{k-n+1}}{k!\,\Gamma(2-n+k)\,\Gamma(\alpha)} [\ln z + \psi(\alpha-n+1+k) -$$

$$- \psi(\alpha-n+1) - \psi(2-n+k)], \quad (26)$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная функции $\Gamma(z)$ (см. Дополнение А). Если здесь в последней сумме $2-n+k=-s$ $(s=0, 1, \ldots)$, то следует иметь в виду соотношения

$$\frac{1}{\Gamma(-s)} = 0, \quad \frac{\psi(-s)}{\Gamma(-s)} = (-1)^{s+1} s!.$$

Поэтому последнюю сумму следует разбить на две части, в первой из которых содержатся слагаемые при $0 \leqslant k \leqslant n-2$, а во второй слагаемые при $k \geqslant n-1$. Удобно заменить индекс суммирования k в первой части суммы на $n-1-k$, а во второй на $n-1+k$. Окончательно получим

$$G(\alpha, n, z) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(\alpha-n+1)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(\alpha-k)_k (n-k)_k} z^{-k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{k!\,(n)_k} [\ln z + \psi(\alpha+k) - \psi(n+k) - \psi(k+1)] \right\} \quad (27)$$

(при $n=1$ первую сумму следует положить равной нулю).

3. Особые случаи. Рассмотрим вопрос о выборе линейно независимых решений гипергеометрического уравнения при любых значениях α, β, γ. Если $\gamma \neq n$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$, то линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения являются функции

$$u_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

$$u_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z).$$

Если же $\gamma = n$, то одна из этих функций теряет смысл и встает вопрос о выборе двух линейно независимых решений гипергеометрического уравнения.

Рассмотрим сначала этот вопрос для случая, когда $\gamma = n$ ($n = 1, 2, \ldots$), а величины α, β, $\alpha+\beta$ не являются целыми числами. Используем в качестве двух линейно независимых решений функции $F(\alpha, \beta, n, z)$, $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$. Для доказательства линейной независимости этих функций рассмотрим их поведение в случае, когда $z \to 0$. Как известно, $F(\alpha, \beta, n, 0) = 1$. Для исследования поведения функции $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$ при $z \to 0$ воспользуемся функциональным соотношением, получающимся из (11) заменой γ на $\alpha+\beta-\gamma+1$, z на $1-z$:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) =$$
$$= \Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\left[\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)} F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]. \quad (28)$$

В этом соотношении для раскрытия неопределенности при $\gamma = n$ удобно вместо гипергеометрических функций использовать функции

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

С помощью формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ соотношение (28) можно записать в виде

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) =$$
$$= \Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\frac{\pi}{\sin \pi\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]. \quad (29)$$

Значение $\gamma = n$ в правой части является устранимой особой точкой. Перейдем к пределу в (29) при $\gamma \to n$, используя правило Лопиталя:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z) =$$
$$= (-1)^n \Gamma(\alpha+\beta-n+1)\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\right] - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]\right\}\right|_{\gamma=n} =$$
$$= (-1)^n \Gamma(\alpha+\beta-n+1)\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma)}\right] - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)}{\Gamma(2-\gamma)}\right]\right\}\right|_{\gamma=n}.$$

Отсюда

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)(n-1)!}\{[\psi(\alpha-n+1)+$$

$$+\psi(\beta-n+1)-\psi(n)]F(\alpha, \beta, n, z)+\Phi(\alpha, \beta, n, z)\}, \quad (30)$$

где

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma, z) - \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[z^{1-\gamma}\frac{F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)}{\Gamma(2-\gamma)}\right]. \quad (31)$$

Получим разложение функции $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ по степеням z, используя соответствующие разложения для гипергеометрических функций. Имеем при $|z|<1$

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k}z^k[\psi(\gamma)-\psi(\gamma+k)]+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1+k)\Gamma(\beta-\gamma+1+k)}{k!\,\Gamma(2-\gamma+k)}z^{k+1-\gamma}\times$$

$$\times[\ln z+\psi(\alpha-\gamma+1+k)-\psi(\alpha-\gamma+1)+\psi(\beta-\gamma+1+k)-$$

$$-\psi(\beta-\gamma+1)-\psi(2-\gamma+k)].$$

Проводя в этом соотношении при $\gamma=n$ те же преобразования, что и при переходе от (26) к (27), получим

$$\Phi(\alpha, \beta, n, z) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(n-k)_k(\alpha-k)_k(\beta-k)_k}z^{-k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(n)_k}z^k[\ln z+\psi(\alpha+k)-\psi(\alpha-n+1)+\psi(\beta+k)-$$

$$-\psi(\beta-n+1)+\psi(n)-\psi(n+k)-\psi(k+1)]. \quad (32)$$

Это выражение будет справедливым и при $n=1$, если первую сумму в нем положить равной нулю.

Из (30), (32) видно, что функции $F(\alpha, \beta, n, z)$, $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$ в случае, когда α, β, $\alpha+\beta$ не являются целыми числами, будут линейно независимыми, так как имеют различное поведение при $z\to 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае в качестве линейно независимых решений гипергеометрического уравнения можно выбрать функции $F(\alpha, \beta, n, z)$, $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$. Вместо функции $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$ в качестве второго линейно независимого решения удобно использовать функцию $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$, так как в этом случае ограничение на параметры α, β можно ослабить. Действительно, из (30) вытекает, что функция $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ будет решением гипергеометрического уравнения при $\gamma = n$, если α, β, $\alpha+\beta$ не являются целыми числами, так как она является линейной комбинацией двух решений этого уравнения: $F(\alpha, \beta, n, z)$ и $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$. С другой стороны, функция $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ и ее производные по z будут аналитическими функциями каждой из переменных при $|\arg z| < \pi$, как это следует из (31), при любых значениях параметров, за исключением случая, когда множитель

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n+1)}$$

обращается в бесконечность, что соответствует $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ или $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому при $\gamma = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \neq \infty$$

линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения являются функции $F(\alpha, \beta, n, z)$, $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$. Если же $\gamma = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} = \infty,$$

то двумя линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения, так же как и при $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будут $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$, так как функция $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$ имеет смысл при $\gamma = n$ и целых значениях $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ или $\beta = 1, 2, \ldots, n-1$. Эта функция при таких значениях α, β, γ является полиномом в силу того, что величины $\alpha-\gamma+1$ или $\beta-\gamma+1$ будут принимать целые отрицательные значения, бо́льшие значения $2-\gamma$ (см. п. 1).

Выражение (32) для $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ содержит неопределенность в случае, когда α или β принимают значения $0, -1, -2, \ldots$ Если воспользоваться формулами дополнения для $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ при $z \leqslant 0$, то при $\alpha = -m$ $(m = 0, 1, \ldots)$ эта неопределенность раскрывается следующим образом:

$$(\alpha)_k\,[\psi(\alpha+k) - \psi(\alpha-n+1)]\,|_{\alpha=-m} = \begin{cases} (-1)^m\,(k-m-1)!\,, & k-m > 0, \\ (-1)^k\,\dfrac{m!}{(m-k)!}\,[\psi(m+1-k) - \psi(m+n)], & k-m \leqslant 0. \end{cases}$$

Аналогично раскрывается неопределенность в произведении $(\beta)_k[\psi(\beta+k) - \psi(\beta-n+1)]$ при $\beta = 0, -1, -2, \ldots$

Нам остается рассмотреть случай, когда в гипергеометрическом уравнении $\gamma = -n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Этот случай можно свести к предыдущему, если вспомнить, что гипергеометрическое уравнение для функции $u(z)$ после замены $u = z^{1-\gamma}y$ приводится к гипергеометрическому уравнению для $y(z)$ с параметрами $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$ (см. § 20, п. 2). Поэтому при $\gamma = -n$ линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения являются функции:

а) $$u_1(z) = z^{n+1} F(\alpha + n + 1,\ \beta + n + 1, n + 2, z),$$
$$u_2(z) = z^{n+1} \Phi(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, n + 2, z),$$

если

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)} \neq \infty;$$

б) $$u_1(z) = F(\alpha, \beta, -n, z),$$
$$u_2(z) = z^{n+1} F(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, n + 2, z),$$

если

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)} = \infty.$$

Таким образом, с помощью рассмотренных рассуждений можно построить полную совокупность линейно независимых решений для гипергеометрического и вырожденного гипергеометрического уравнений при любых значениях параметров, входящих в эти уравнения.

Таблица 4

Линейно независимые решения гипергеометрического уравнения в особых случаях

γ	α, β	$u_1(z)$	$u_2(z)$
$\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	любые	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$z^{1-\gamma}F(\alpha', \beta', \gamma', z)$
$1 + m$	$(\alpha')_m(\beta')_m = 0$,	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$z^{1-\gamma}F(\alpha', \beta', \gamma', z)$
$(m = 0, 1 \ldots)$	$(\alpha')_m(\beta')_m \neq 0$	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, z)$
$1 - m$	$(\alpha)_m(\beta)_m = 0$	$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$	$z^{1-\gamma}F(\alpha', \beta', \gamma', z)$
$(m = 1, 2 \ldots)$	$(\alpha)_m(\beta)_m \neq 0$,	$z^{1-\gamma}\Phi(\alpha', \beta', \gamma', z)$	$z^{1-\gamma}F(\alpha', \beta', \gamma', z)$

В заключение приведем табл. 4 для двух линейно независимых решений $u_1(z)$, $u_2(z)$ гипергеометрического уравнения в зависимости от значений α, β, γ. Здесь $(\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + k - 1)$, $(\alpha)_0 = 1$, $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\beta' = \beta - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$.