§ 22. Представление различных функций через функции гипергеометрического типа

Многие специальные функции, возникающие при решении задач математической и теоретической физики, могут быть выражены через функции гипергеометрического типа — гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, вырожденные гипергеометрические функции $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$, функцию Эрмита $H_\nu(z)$. Такое представление дает возможность изучать свойства рассматриваемых функций, используя полученные ранее результаты для функций гипергеометрического типа — разложения в степенные ряды, асимптотические представления, рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования. Рассмотрим несколько характерных примеров.

1. Некоторые элементарные функции. Наиболее простой вид имеют функции $F(\alpha, 0, \gamma, z)$, $F(0, \gamma, z)$, $G(0, \gamma, z)$. Действительно, используя соответствующие степенные ряды и соотношение (21.14), получим

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = F(0, \gamma, z) = G(0, \gamma, z) = 1.$$

Применение функциональных соотношений (21.6), (21.8), (21.8а) дает

$$F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha} F(\beta-\alpha, 0, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha},$$

$$F(\alpha, \alpha, z) = e^z F(0, \alpha, -z) = e^z,$$

$$G(\alpha, \alpha+1, z) = z^{-\alpha} G(0, 1-\alpha, z) = z^{-\alpha}.$$

2. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита. Как было показано в § 2, полиномиальные решения дифференциального уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

определяются однозначно с точностью до нормировочного множителя. Поэтому для нахождения полиномов гипергеометрического типа достаточно найти те частные решения уравнения (1), которые являются полиномами. С другой стороны, решения уравнения (1) можно выразить через гипергеометрические, вырожденные гипергеометрические функции и функции Эрмита в зависимости от степени полинома $\sigma(z)$. Это дает возможность установить связь между полиномами Якоби, Лагерра, Эрмита и функциями $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, $F(\alpha, \gamma, z)$, $G(\alpha, \gamma, z)$, $H_\nu(z)$.

1. Полиномы Якоби. Для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ дифференциальное уравнение (1) имеет вид

$$(1-z^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)z]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

После замены $z = 1-2s$ оно сводится к гипергеометрическому уравнению

$$s(1-s)y'' + [\gamma_1 - (\alpha_1+\beta_1+1)s]y' - \alpha_1\beta_1 y = 0,$$

в котором $\alpha_1 = -n$, $\beta_1 = n+\alpha+\beta+1$, $\gamma_1 = \beta+1$. Частным решением этого уравнения, являющимся полиномом, будет функция

$$y(z)=F(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,s)=F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\ \alpha+1,\frac{1-z}{2}\right).$$

Поэтому

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=c_n F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1,\frac{1-z}{2}\right).$$

Постоянную c_n легко найти, положив $z=1$ (см. (5.10)). В результате получим

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1,\frac{1-z}{2}\right). \quad (2)$$

С помощью соотношения (см. § 6, п. 6)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-z)$$

можно получить эквивалентную запись представления (2):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=$$

$$=\frac{(-1)^n\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\beta+1,\frac{1+z}{2}\right). \quad (3)$$

Полагая в (2), (3) $\alpha=\beta=0$, получим следующие представления полиномов Лежандра через гипергеометрические функции:

$$P_n(z)=F\left(-n,n+1,1,\frac{1-z}{2}\right)=(-1)^n F\left(-n,n+1,1,\frac{1+z}{2}\right).$$

2. Полиномы Лагерра. Дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(z)$

$$zy''+(1+\alpha-z)y'+ny=0$$

имеет частное решение

$$y(z)=F(-n,\ 1+\alpha,\ z),$$

являющееся полиномом. Поэтому

$$L_n^\alpha(z)=c_n F(-n,1+\alpha,z).$$

Постоянную c_n можно найти, полагая $z=0$ (см. (5.10)). В результате получим

$$L_n^\alpha(z)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F(-n,1+\alpha,z).$$

С помощью соотношения (21.17) полиномы $L_n^\alpha(z)$ можно выразить также через вырожденную гипергеометрическую функцию второго рода $G(\alpha,\gamma,z)$:

$$L_n^\alpha(z)=\frac{(-1)^n}{n!}G(-n,1+\alpha,z).$$

3. Полиномы Эрмита. Дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита

$$y''-2zy'+2ny=0$$

имеет в качестве частного решения функцию Эрмита $H_n(z)$, которая является полиномом степени n. Действительно, функциональное соотношение (21.22) дает

$$H_{2n}(z)=\frac{2^{2n}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2-n)}F\left(-n,\frac{1}{2},z^2\right),$$

$$H_{2n+1}(z)=-\frac{2^{2n+2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2-n)}zF\left(-n,\frac{3}{2},z^2\right).$$

Сравнение коэффициентов при старшей степени у функций Эрмита $H_\nu(z)$ при $\nu=n$ и у полиномов Эрмита показывает, что $H_\nu(z)$ при $\nu=n$ совпадает с полиномом Эрмита.

3. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Рассмотрим теперь связь классических ортогональных полиномов дискретной переменной с гипергеометрическими функциями. Эту связь можно установить, используя формулу Родрига (12.22):

$$y_n(x)=\frac{B_n}{\rho(x)}\nabla^n\rho_n(x).$$

Для произвольной функции $f(x)$ по индукции можно доказать, что

$$\nabla^n f(x)=\sum_{k=0}^{n-k}(-1)^k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}f(x-k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{k!}f(x-k).$$

Поэтому

$$y_n(x)=B_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{k!}\frac{\rho_n(x-k)}{\rho(x)}.$$

В частности, для полиномов Мейкснера $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ имеем

$$\rho_n(x)=\rho(x+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(x+k)=\mu^{x+n}\frac{\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma)}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho_n(x-k)}{\rho(x)}=\mu^{n-k}\frac{\Gamma(\gamma+x+n-k)\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)\Gamma(\gamma+x)}=$$

$$=\mu^{n-k}\frac{\Gamma(\gamma+x+n)\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma+x+n-k)}{\Gamma(\gamma+x)\Gamma(x+1-k)\Gamma(\gamma+x+n)}=$$

$$=\mu^{n-k}(\gamma+x)_n\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{(\gamma+x+n-1)(\gamma+x+n-2)\ldots(\gamma+x+n-k)}=$$

$$=\mu^{n-k}(\gamma+x)_n\frac{(-x)_k}{(-\gamma-x-n+1)_k}.$$

Поэтому

$$m_n^{(\gamma,\mu)}(x)=(\gamma+x)_nF(-n,-x,-\gamma-x-n+1,1/\mu).$$

Совершенно аналогично можно получить следующие соотношения для полиномов Кравчука $k_n^{(p)}(x)$ и Шарлье $c_n^{(\mu)}(x)$:

$$k_n^{(p)}(x)=(-N+x)_n\frac{p^n}{n!}F\left(-n,-x,N-n-x+1,-\frac{q}{p}\right),$$

$$c_n^{(\mu)}(x)=(-x)_n\mu^{-n}F(-n,x-n+1,\mu).$$

Полиномы Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ подобным же образом можно выразить через обобщенные гипергеометрические функции (см. § 21, п. 1):

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(\beta+1+x)_n(-N+1+x)_n}{n!}\times$$
$$\times{}_3F_2(-n,\,-x,\,N+\alpha-x;\,N-x-n,\,-\beta-x-n;\,1).$$

Замечание. Сравнивая формулы, выражающие полиномы Якоби и полиномы Мейкснера через гипергеометрические функции, можно установить связь между этими полиномами:

$$m_n^{(\gamma,\mu)}(x)=n!P_n^{(\gamma-1,-\gamma-n-x)}\left(\frac{2-\mu}{\mu}\right).$$

Подобным же образом получим связь полиномов Лагерра и Шарлье:

$$c_n^{(\mu)}(x)=\frac{n!}{(-\mu)^n}L_n^{x-n}(\mu).$$

4. Функции второго рода. Связь функций второго рода для классических ортогональных полиномов $Q_n(z)$ с функциями гипергеометрического типа проще всего получить, если исходить непосредственно из интегральных представлений для $Q_n(z)$ (см. § 11, п. 1).

1. Функции Якоби второго рода. Интегральное представление для функции Якоби второго рода $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ имеет вид

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n(1-z)^\alpha(1+z)^\beta}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-s)^{n+\alpha}(1+s)^{n+\beta}}{(s-z)^{n+1}}\,ds. \tag{4}$$

Полагая $s=2t-1$, получим

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=$$
$$=-\frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^\alpha(1+z)^{n+\beta+1}}\int\limits_0^1 t^{n+\beta}(1-t)^{n+\alpha}\left(1-\frac{2}{n+z}t\right)^{-n-1}dt.$$

Сравнивая полученную формулу с интегральным представлением (20.13) для гипергеометрической функции, приходим к следующему представлению для $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=-\frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^\alpha(1+z)^{n+\beta+1}}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}\times$$
$$\times F\left(n+1,\,n+\beta+1,\,2n+\alpha+\beta+2,\,\frac{2}{1+z}\right).$$

Совершенно аналогично, полагая в (4) $s=1-2t$, получим

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{n+\alpha+1}(1+z)^\beta}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}\times$$
$$\times F\left(n+1,\,n+\alpha+1,\,2n+\alpha+\beta+2,\,\frac{2}{1-z}\right).$$

2. Функции Лагерра второго рода. Интегральное представление для функции Лагерра второго рода $Q_n^\alpha(z)$ имеет вид

$$Q_n^\alpha(z) = \frac{1}{e^{-z}z^\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-s}s^{n+\alpha}}{(s-z)^{n+1}}\,ds.$$

Пусть $z<0$. Полагая $s=-zt$, получим

$$Q_n^\alpha(z) = e^z z^{-\alpha}(-z)^\alpha \int\limits_0^\infty e^{zt}t^{n+\alpha}(1+t)^{-n-1}dt.$$

Сравнивая это выражение с интегральным представлением (20.26) для вырожденной гипергеометрической функции второго рода, получим

$$Q_n^\alpha(s) = e^z z^{-\alpha}(-z)^\alpha\Gamma(n+\alpha+1)\,G(n+\alpha+1,\alpha+1,-z). \quad (5)$$

Так как в определении функции $Q_n^\alpha(z)$ встречается множитель z^α, то для однозначности $Q_n^\alpha(z)$ должен быть сделан разрез вдоль вещественной оси при $z>0$, т. е. следует считать $0<\arg z<2\pi$. Поэтому при $z<0$ следует положить $z^{-\alpha}=e^{-i\pi\alpha}(-z)^{-\alpha}$. В результате получим

$$Q_n^\alpha(z) = e^{-i\pi\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)\,e^z G(n+\alpha+1,\alpha+1,-z).$$

Это соотношение выведено при $z<0$, однако по принципу аналитического продолжения оно остается справедливым при любых значениях z.

3. Функции Эрмита второго рода. Интегральное представление для функции Эрмита второго рода $Q_n(z)$ имеет вид

$$Q_n(z) = (-1)^n n!\,e^{z^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}(\xi-z)^{-n-1}d\xi.$$

Для представления $Q_n(z)$ через функцию Эрмита воспользуемся тем, что функция $Q_n(z)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и полиномы Эрмита. Поэтому она может быть представлена в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений уравнения для полиномов Эрмита:

$$Q_n(z) = A_n H_n(z) + B_n e^{z^2}H_{-n-1}(-iz), \quad (6)$$

или

$$Q_n(z) = C_n H_n(z) + D_n e^{z^2}H_{-n-1}(iz). \quad (7)$$

Для определения коэффициентов этих разложений воспользуемся асимптотическими представлениями функции $Q_n(z)$

и функций Эрмита при $z \to \infty$. Пусть $z = iy$, $y \to +\infty$. Тогда по формуле (11.7)

$$Q_n(z) = -\frac{e^{-y^2}}{(iy)^{n+1}} n! \sqrt{\pi}\left[1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right].$$

С другой стороны, в силу (21.24) имеем

$$H_n(z) = (2iy)^n [1 + O(1/y^2)],$$

$$H_{-n-1}(-iz) = (2y)^{-n-1} [1 + O(1/y^2)].$$

Отсюда $A_n = 0$, $B_n = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \exp\{-i\pi(n-1)/2\}$. Окончательно получаем, что при $\operatorname{Im} z > 0$

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \exp\{z^2 - i\pi(n-1)/2\} H_{-n-1}(-iz).$$

Аналогично, из связи $Q_n(\bar{z}) = \bar{Q}_n(z)$ (черта — знак комплексного сопряжения) находим, что при $\operatorname{Im} z < 0$

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} \exp\{z^2 + i\pi(n-1)/2\} H_{-n-1}(iz).$$

5. Цилиндрические функции. Связь цилиндрических функций с вырождёнными гипергеометрическими функциями первого и второго рода легко установить также с помощью интегральных представлений для этих функций. Например, имеем (см. § 17, п. 3)

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\nu - 1/2} \operatorname{ch} zt\, dt,$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu - 1/2} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu - 1/2} dt.$$

Интегральное представление для функции $K_\nu(z)$ заменой t на zt можно связать с интегральным представлением для функции $G(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2z)$:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi}(2z)^\nu e^{-z} G(\nu + 1/2, 2\nu + 1, 2z).$$

Чтобы установить связь $I_\nu(z)$ с вырожденной гипергеометрической функцией, заметим, что в подынтегральном выражении для $I_\nu(z)$ можно заменить $\operatorname{ch} zt$ на e^{zt}, так как $e^{zt} = \operatorname{ch} zt + \operatorname{sh} zt$ и интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю. После замены t на $2t - 1$ приходим к следующему интегральному представлению:

$$I_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu e^{-z}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^1 e^{2zt} [t(1 - t)]^{\nu - 1/2} dt.$$

Отсюда

$$I_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu e^{-z}\, \Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu + 1)} F\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2z\right).$$

По формуле удвоения для гамма-функции имеем

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+1) = 2^{2\nu}\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(\nu+1).$$

Поэтому окончательно получаем

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} F\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1,\ 2z\right).$$

6. Эллиптические интегралы. *Эллиптическими интегралами первого и второго рода* называются соответственно функции

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} (1 - z^2\sin^2\varphi)^{-1/2} d\varphi, \quad E(z) = \int_0^{\pi/2} (1 - z^2\sin^2\varphi)^{1/2} d\varphi.$$

Полагая $\sin^2\varphi = t$, придем к следующим интегральным представлениям:

$$K(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}(1-z^2t)^{-1/2}\,dt,$$

$$E(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}(1-z^2t)^{1/2}\,dt.$$

Сравнивая эти представления с интегральными представлениями для гипергеометрической функции, получим

$$K(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right), \quad E(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, z^2\right).$$

Связь эллиптических интегралов с гипергеометрическими функциями дает возможность изучить свойства функций $K(z)$, $E(z)$ при комплексных значениях z.

7. Функции Уиттекера. Одним из частных случаев обобщенного уравнения гипергеометрического типа является *уравнение Уиттекера*

$$u'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2}\right) u = 0, \tag{8}$$

где k, μ — постоянные. Заменой $u = z^{\mu+1/2}e^{-z/2}y$ это уравнение сводится к уравнению

$$zy'' + (2\mu + 1 - z)y' + (k - \mu - 1/2)y = 0,$$

решениями которого являются функции

$$y_1(z) = F(1/2 - k + \mu,\ 2\mu + 1,\ z), \quad y_2(z) = G(1/2 - k + \mu,\ 2\mu + 1,\ z).$$

Таким образом, уравнение Уиттекера имеет частные решения

$$u_1(z) = M_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2}e^{-z/2}F\left(\frac{1}{2} - k + \mu, 2\mu + 1, z\right),$$

$$u_2(z) = W_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2}e^{-z/2}G\left(\frac{1}{2} - k + \mu, 2\mu + 1, z\right),$$

которые называются *функциями Уиттекера.*

Функции Уиттекера $M_{k\mu}(z)$ имеют простое поведение при $z \to 0$, а функции $W_{k\mu}(z)$ при $z \to \infty$.

Так как уравнение Уиттекера не меняется при замене μ на $-\mu$ или при одновременной замене k на $-k$ и z на $-z$, то его решениями являются также функции $M_{k,-\mu}(z)$ и $M_{-k,\pm\mu}(-z)$, $W_{k,-\mu}(z)$

и $W_{-k,\pm\mu}(-z)$. Между полученными решениями существует целый ряд функциональных соотношений, вытекающих из соответствующих функциональных соотношений для вырожденных гипергеометрических функций. Имеем, например,

$$M_{-k,\mu}(-z)=(-z)^{\mu+1/2}e^{z/2}F\left(\frac{1}{2}+k+\mu,\,2\mu+1,\,-z\right)=$$
$$=(-z)^{\mu+1/2}e^{-z/2}F\left(\frac{1}{2}-k+\mu,\,2\mu+1,\,z\right),$$

т. е. функции $M_{k\mu}(z)$, $M_{-k\mu}(-z)$ линейно зависимы. Из функционального соотношения (21.8а) следует, что

$$W_{k,-\mu}(z)=W_{k\mu}(z).$$

§ 23. Определенные интегралы, содержащие функции гипергеометрического типа

Возникающие в приложениях определенные интегралы, содержащие функции гипергеометрического типа, обычно вычисляются либо с помощью интегральных представлений для функций гипергеометрического типа, либо с помощью разложения этих функций в ряды. Мы ограничимся несколькими примерами.

1. Для вычисления интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\nu F(\alpha,\gamma,kx)\,dx,\quad \operatorname{Re}\lambda>\operatorname{Re}k,\quad \operatorname{Re}\nu>-1,$$

удобно воспользоваться интегральным представлением (20.14), предполагая временно, что $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0$ и $\lambda>k>0$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\nu F(\alpha,\gamma,kx)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt\int_0^\infty e^{-\lambda x+kxt}x^\nu dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{k}{\lambda}t\right)^{-\nu-1}dt.$$

Интегральное представление (20.13) дает

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\nu F(\alpha,\gamma,kx)\,dx=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}F\left(\alpha,\nu+1,\gamma,\frac{k}{\lambda}\right).$$

Полученную формулу можно распространить на произвольные значения α, γ, λ, k с помощью принципа аналитического продолжения.

2. Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)x^\rho dx$$

легко вычисляется, если использовать разложение функции