и $W_{-k,\pm\mu}(-z)$. Между полученными решениями существует целый ряд функциональных соотношений, вытекающих из соответствующих функциональных соотношений для вырожденных гипергеометрических функций. Имеем, например,

$$M_{-k,\mu}(-z)=(-z)^{\mu+1/2}e^{z/2}F\left(\frac{1}{2}+k+\mu,2\mu+1,-z\right)=$$
$$=(-z)^{\mu+1/2}e^{-z/2}F\left(\frac{1}{2}-k+\mu,2\mu+1,z\right),$$

т. е. функции $M_{k\mu}(z)$, $M_{-k\mu}(-z)$ линейно зависимы. Из функционального соотношения (21.8а) следует, что

$$W_{k,-\mu}(z)=W_{k\mu}(z).$$

## § 23. Определенные интегралы, содержащие функции гипергеометрического типа

Возникающие в приложениях определенные интегралы, содержащие функции гипергеометрического типа, обычно вычисляются либо с помощью интегральных представлений для функций гипергеометрического типа, либо с помощью разложения этих функций в ряды. Мы ограничимся несколькими примерами.

1. Для вычисления интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\nu F(\alpha,\gamma,kx)\,dx,\quad \operatorname{Re}\lambda>\operatorname{Re}k,\quad \operatorname{Re}\nu>-1,$$

удобно воспользоваться интегральным представлением (20.14), предполагая временно, что $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0$ и $\lambda>k>0$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\nu F(\alpha,\gamma,kx)\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt\int_0^\infty e^{-\lambda x+kxt}x^\nu dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{k}{\lambda}t\right)^{-\nu-1}dt.$$

Интегральное представление (20.13) дает

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^\nu F(\alpha,\gamma,kx)\,dx=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}F\left(\alpha,\nu+1,\gamma,\frac{k}{\lambda}\right).$$

Полученную формулу можно распространить на произвольные значения $\alpha$, $\gamma$, $\lambda$, $k$ с помощью принципа аналитического продолжения.

2. Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)x^\rho dx$$

легко вычисляется, если использовать разложение функции

Бесселя $J_\nu(bx)$ в ряд. Имеем

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho dx = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (bx/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\right] x^\rho dx =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (b/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+\rho+2k} dx.$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+\rho+2k} dx = \frac{1}{2a^{\nu+\rho+2k+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{(\nu+\rho-1)/2+k}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2+k)}{2a^{\nu+\rho+2k+1}}.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho dx = \frac{1}{2a^{\rho+1}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu+2k} \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2+k)}{k!\,\Gamma(\nu+1+k)}.$$

Если воспользоваться разложением (21.3) для вырожденной гипергеометрической функции и функциональным соотношением (21.8), то интересующий нас интеграл можно выразить через вырожденные гипергеометрические функции:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{(b/(2a))^\nu}{2a^{\rho+1}} F\left(\frac{\nu+\rho+1}{2},\ \nu+1, -\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma((\nu+\rho+1)/2)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{(b/(2a))^\nu}{2a^{\rho+1}} e^{-b^2/(4a)^2} F\left(\frac{\nu+1-\rho}{2}, \nu+1, \frac{b^2}{4a^2}\right). \quad (1)$$

3. Рассмотрим *интеграл Сонина — Гегенбауэра*:

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1} dx,\ a>0,\ b>0,\ y>0,\ \operatorname{Re}\nu>-1.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся интегральным представлением Зоммерфельда для функции Макдональда и формулой (1) при $\rho=\nu+1$. Имеем

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1} dx =$$

$$= \frac{a^\mu}{2^{\mu+1}} \int_0^\infty J_\nu(bx)\, x^{\nu+1} dx \int_0^\infty \exp\left\{-t - \frac{a^2(x^2+y^2)}{4t}\right\} \frac{dt}{t^{\mu+1}} =$$

$$= \frac{a^{\mu}}{2^{\mu+1}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-t - \frac{a^2y^2}{4t}\right\} \frac{dt}{t^{\mu+1}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2x^2}{4t}\right\} J_{\nu}(bx)\, x^{\nu+1} dx =$$

$$= 2^{\nu-\mu} a^{\mu-2\nu-2} b^{\nu} \int_0^{\infty} \exp\left\{-t\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{a^2y^2}{4t}\right\} \frac{dt}{t^{\mu-\nu}} =$$

$$= \frac{2^{\nu-\mu} b^{\nu}}{a^{\mu}} (a^2+b^2)^{\mu-\nu-1} \int_0^{\infty} \exp\left\{-u - \frac{y^2(a^2+b^2)}{4u}\right\} \frac{du}{u^{\mu-\nu}} =$$

$$= \frac{b^{\nu}}{a^{\mu}} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_{\nu}(bx)\, x^{\nu+1} dx =$$

$$= \frac{b^{\nu}}{a^{\mu}} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right). \qquad (2)$$

Приведем некоторые следствия из соотношения (2).

а) Пусть $\mu = 1/2$. Так как

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z},$$

то

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_{\nu}(bx)\, x^{\nu+1} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi b}} \left(\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\nu+1/2} K_{\nu+1/2}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right). \qquad (3)$$

В частности, при $\nu = 0$ получим

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0(bx)\, x\, dx = \frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (4)$$

При $y \to 0$, $\nu + 1/2 > 0$ формула (3) дает

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_{\nu}(bx)\, x^{\nu} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi(a^2+b^2)}} \left(\frac{2b}{a^2+b^2}\right)^{\nu} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right). \qquad (5)$$

При выводе (5) мы воспользовались тем, что при $\nu > 0$, $z \to 0$

$$K_\nu(z) \approx \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\,\frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)} = \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}.$$

б) Пусть в (2) $\nu < 2\mu - 3/2$, $a \to 0$. Так как при этом

$$K_\mu(az) \approx \frac{\Gamma(\mu)}{2}\left(\frac{az}{2}\right)^{-\mu},$$

то

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)\,x^{\nu+1}}{(x^2+y^2)^\mu}\,dx = \left(\frac{b}{2y}\right)^{\mu-1}\frac{y^\nu}{\Gamma(\mu)}\,K_{\mu-\nu-1}(by). \tag{6}$$

Полагая здесь $\mu = 3/2$, $\nu = 0$, получим

$$\int_0^\infty \frac{J_0(bx)\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx = \frac{e^{-by}}{y}. \tag{7}$$

Соотношения (2)—(7) были выведены при некоторых ограничениях, наложенных на параметры. С помощью принципа аналитического продолжения полученные результаты легко распространяются на более широкую область значений параметров. В частности, (6) справедливо при

$$-1 < \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}\mu - 1/2.$$

Из (6) при $\mu = 1/2$, $\nu = 0$ находим

$$\int_0^\infty \frac{xJ_0(bx)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \frac{e^{-by}}{b}.$$