ГЛАВА V

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Теория специальных функций является разделом математики, глубоко проникающим своими корнями в математический анализ, теорию функций комплексного переменного, теорию представлений групп, теоретическую и математическую физику. Благодаря этим связям специальные функции имеют широкую область применения. В настоящей главе рассмотрен ряд примеров использования специальных функций для решения некоторых важных задач математической физики, квантовой механики и вычислительной математики.

§ 24. Приведение уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям методом разделения переменных

1. Общая схема метода разделения переменных. Обобщенные уравнения гипергеометрического типа возникают, как правило, в результате решения уравнений математической физики и квантовой механики методом разделения переменных. Напомним основные черты метода разделения переменных. Этот метод применяется для отыскания частных решений уравнений вида

$$Lu = 0, \tag{1}$$

где оператор L представляется в виде

$$L = L_1L_2 + M_1M_2. \tag{2}$$

Операторы L_1, M_1 действуют лишь на одну группу переменных, от которых зависит функция u, а L_2, M_2 действуют на оставшиеся переменные. Под произведением операторов подразумевается результат их последовательного применения. При этом предполагается, что все операторы L_i, M_i $(i = 1, 2)$ являются линейными, т. е.

$$L_i(c_1u + c_2v) = c_1L_iu + c_2L_iv,$$
$$M_i(c_1u + c_2v) = c_1M_iu + c_2M_iv,$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Пример 1. Пусть $Lu = u_{xx} + u_{yy}$. В данном случае

$$L_1 = \partial^2/\partial x^2, \quad L_2 = E, \quad M_1 = E, \quad M_2 = \partial^2/\partial y^2,$$

где E — единичный оператор.

Для операторов вида (2) частное решение уравнения (1) можно искать в виде $u = u_1 u_2$, где функция u_1 зависит лишь от первой группы переменных, а u_2 от остальных переменных. В силу того, что

$$L_1 L_2 (u_1 u_2) = L_1 u_1 \cdot L_2 u_2, \quad M_1 M_2 (u_1 u_2) = M_1 u_1 \cdot M_2 u_2,$$

уравнение $Lu = 0$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = -\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}.$$

Так как функция $L_1 u_1 / M_1 u_1$ не зависит от второй группы переменных, а $M_2 u_2 / L_2 u_2$ от первой группы переменных, то

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = -\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2} = \lambda,$$

где λ — некоторая постоянная. В результате приходим к уравнениям, в каждое из которых входят функции, зависящие лишь от части исходных переменных:

$$L_1 u_1 = \lambda M_1 u_1, \quad M_2 u_2 = -\lambda L_2 u_2. \tag{3}$$

В силу линейности оператора L линейная комбинация решений, т. е.

$$u = \sum_i c_i u_{1i} u_{2i}$$

(c_i — постоянные), соответствующих различным возможным значениям $\lambda = \lambda_i$, является решением уравнения (1). При определенных условиях (связанных с полнотой набора частных решений) произвольное решение уравнения $Lu = 0$ можно представить в виде $u = \sum\limits_i c_i u_{1i} u_{2i}$ (см. [17]).

Мы свели решение исходного уравнения к уравнениям с меньшим числом переменных. Особый интерес представляют случаи, когда исходное уравнение последовательным применением метода разделения переменных удается свести к совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Применение криволинейных систем координат. Мы рассмотрели общие черты метода разделения переменных для решения уравнений вида $Lu = 0$, где L — некоторый линейный оператор. В конкретных задачах, когда требуется найти решение уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее определенным граничным условиям, метод разделения переменных удобно применять в тех случаях, когда переменные можно разделить не только в уравнении, но и в граничных условиях. В связи с этим часто вместо декартовых координат используются другие независимые переменные, отражающие симметрию задачи. Криволинейную систему координат следует выбирать таким образом, чтобы:

1) граница области, в которой решается задача, состояла из координатных поверхностей;

2) после перехода к криволинейным координатам можно было бы разделить переменные в уравнении.

Пример 2. Рассмотрим решение уравнения Гельмгольца $\Delta u+k^2u=0$ $\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.$ — оператор Лапласа$\Big)$ методом разделения переменных. Для этого уравнения известно 11 систем криволинейных координат, в которых переменные разделяются. При этом возникают, как правило, обобщенные уравнения гипергеометрического типа.

Рассмотрим в виде примера нахождение частных решений методом разделения переменных для уравнения Гельмгольца в параболических цилиндрических координатах и координатах параболоида вращения*). Параболические цилиндрические координаты ξ, η, ζ связаны с декартовыми координатами с помощью формул

$$x=\xi\eta, \quad y=(\xi^2-\eta^2)/2, \quad z=\zeta;$$

координаты параболоида вращения ξ, η, φ — формулами

$$x=\xi\eta\cos\varphi, \quad y=\xi\eta\sin\varphi, \quad z=(\xi^2-\eta^2)/2.$$

В первом случае уравнение Гельмгольца $\Delta u+k^2u=0$ принимает вид

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+k^2u=0, \tag{4}$$

во втором случае —

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{(\xi\eta)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{5}$$

Найдем частное решение уравнения (4) методом разделения переменных, полагая

$$u=U(\xi)V(\eta)W(\zeta). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), получим

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}+\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}\right]=-\left[\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)}+k^2\right].$$

Левая часть этого равенства не зависит от ζ, а правая от ξ, η.

*) В учебниках по квантовой механике координаты параболоида вращения часто называют *параболическими координатами*.

Отсюда

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}+\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}\right]=\lambda, \tag{7}$$

$$\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)}+k^2=-\lambda, \tag{8}$$

где λ — постоянная.

Записывая уравнение (7) в виде

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}-\lambda\xi^2=-\left[\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}-\lambda\eta^2\right],$$

из аналогичных соображений получим

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}-\lambda\xi^2=\mu,\quad \frac{V''(\eta)}{V(\eta)}-\lambda\eta^2=-\mu,$$

где μ — постоянная.

В результате приходим к следующим уравнениям для функций $U(\xi)$, $V(\eta)$, $W(\zeta)$:

$$U''-(\lambda\xi^2+\mu)U=0, \tag{9}$$

$$V''-(\lambda\eta^2-\mu)V=0, \tag{10}$$

$$W''+(k^2+\lambda)W=0. \tag{11}$$

Аналогичным образом, если искать решение уравнения (5) в виде

$$u=U(\xi)V(\eta)W(\varphi),$$

то для функций $U(\xi)$, $V(\eta)$, $W(\varphi)$ получим уравнения

$$U''+\frac{1}{\xi}U'+\left(k^2\xi^2-\frac{\lambda}{\xi^2}+\mu\right)U=0, \tag{12}$$

$$V''+\frac{1}{\eta}V+\left(k^2\eta^2-\frac{\lambda}{\eta^2}-\mu\right)V=0, \tag{13}$$

$$W''+\lambda W=0. \tag{14}$$

Решения уравнений (11), (14) выражаются через элементарные функции. Уравнения (10), (13) сводятся соответственно к уравнениям (9), (12) заменой μ на $-\mu$. Таким образом, нам остается найти решения уравнений (9), (12).

Уравнение (9) является обобщенным уравнением гипергеометрического типа. При рассмотрении (12) естественно предварительно сделать замену $\xi^2=t$, которая позволяет привести (12) к обобщенному уравнению гипергеометрического типа

$$\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dU}{dt}+\frac{1}{4t^2}(k^2t^2+\mu t-\lambda)U=0. \tag{15}$$

Уравнения (9) и (15) сводятся соответственно к уравнениям Эрмита и вырожденному гипергеометрическому уравнению (см. § 20) методом, изложенным в § 1.