§ 25. Краевые задачи математической физики

При решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, изложенным в § 24, задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения этих уравнений для многих интересных задач математической физики можно выразить через специальные функции. Чтобы получить таким способом решение уравнения в частных производных для конкретной задачи, необходимо на решения рассматриваемого уравнения наложить дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения задачи. Эти условия приводят в свою очередь к некоторым дополнительным условиям, налагаемым на решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений, и мы приходим к постановке так называемых краевых задач. Исследование свойств решений произвольных краевых задач в применении к дифференциальным уравнениям для специальных функций позволяет получить некоторые интересные свойства специальных функций.

1. Решение краевых задач методом разделения переменных. Метод разделения переменных, рассмотренный в § 24, широко применяется для решения возникающих в математической физике дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\rho(x, y, z)\left[A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = Lu, \tag{1}$$

где

$$Lu = \operatorname{div}[k(x, y, z)\operatorname{grad} u] - q(x, y, z)u.$$

Если $A(t) = 1$, $B(t) = 0$, то (1) описывает процессы распространения колебаний, например, распространение электромагнитных и звуковых волн; при $A(t) = 0$, $B(t) = 1$ уравнение (1) описывает различные процессы переноса, в частности, процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде; при $A(t) = 0$, $B(t) = 0$ уравнение (1) описывает соответствующие стационарные процессы.

Для уравнений в частных производных решение, вообще говоря, зависит от произвольных функций. Например, общее решение уравнения $\partial^2 u/\partial x\,\partial y = 0$ имеет вид $u(x, y) = f(x) + g(y)$, где f, g — произвольные дифференцируемые функции. Поэтому для однозначного выделения решения уравнения в частных производных, описывающего реальный физический процесс, необходимо задавать дополнительные условия. Наиболее характерными из таких условий являются начальные и граничные условия. Для уравнения (1) начальные условия состоят в задании функций $u(x, y, z, t)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, z, t)$ при $t = 0$ (если $A(t) = 0$, то достаточно задать лишь функцию $u(x, y, z, t)|_{t=0}$). Простейшие граничные условия имеют вид

$$\left[\alpha(x, y, z) u + \beta(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_S = 0. \tag{2}$$

Здесь $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$ — некоторые функции, S — поверхность, ограничивающая область, в которой решается (1), $\partial u/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к поверхности S. Задача, связанная с нахождением решения уравнения (1), удовлетворяющего заданным начальным и граничным условиям, называется *краевой задачей*.

Рассмотрим схему решения краевой задачи методом разделения переменных. Частное решение уравнения (1) с граничным условием (2) можно найти методом разделения переменных, если искать решение в виде

$$u(x, y, z, t) = T(t) v(x, y, z).$$

В результате приходим к следующим уравнениям:

$$A(t) T'' + B(t) T' + \lambda T = 0, \tag{3}$$

$$Lv + \lambda \rho v = 0, \tag{4}$$

где λ — постоянная. Уравнение (3) является обыкновенным дифференциальным уравнением и для характерных задач математической физики легко решается аналитически. Для решения уравнения (4) следует использовать граничное условие, вытекающее из (2):

$$\left[\alpha(x, y, z) v + \beta(x, y; z) \frac{\partial v}{\partial n}\right]\Big|_S = 0. \tag{5}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти нетривиальное решение уравнения (4) с граничным условием (5). Значение λ, для которого поставленная задача имеет нетривиальное решение (т. е. $v(x, y, z) \neq 0$), называется *собственным значением*, а соответствующая функция $v(x, y, z)$ — *собственной функцией*.

Для характерных задач математической физики собственные функции и собственные значения λ можно перенумеровать. Пусть $v_n(x, y, z)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda = \lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Решение уравнения (1) с граничным условием (2) и соответствующими начальными условиями будем искать в виде

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(x, y, z),$$

где $T_n(t)$ — решение уравнения (3) при $\lambda = \lambda_n$. Для того чтобы удовлетворялись начальные условия, начальные значения функций $T_n(t)$, $T'_n(t)$ при $t = 0$ должны выбираться так, чтобы удовлетворялись равенства

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) v_n(x, y, z),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, z, t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0) v_n(x, y, z).$$

Таким образом, для того чтобы решить краевую задачу, следует потребовать, чтобы произвольную функцию переменных x, y, z (в данном случае $u|_{t=0}$, $\partial u/\partial t|_{t=0}$) можно было разложить в ряд по собственным функциям $v_n(x, y, z)$, т. е. система собственных функций $v_n(x, y, z)$ должна обладать так называемым свойством *полноты* *).

Задача особенно упрощается, если краевую задачу (4)—(5) удается методом разделения переменных свести к одномерным краевым задачам, т. е. к уравнениям вида

$$Ly + \lambda \rho y = 0, \tag{6}$$

где

$$Ly = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x) y, \quad k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0.$$

Уравнение (6) рассматривается на интервале (a, b) с граничными условиями вида

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{7}$$

где α_i, β_i — заданные постоянные. Задача такого вида называется *задачей Штурма — Лиувилля*. Функции $k(x)$, $k'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ будем предполагать непрерывными при $x \in [a, b]$.

2. Задача Штурма — Лиувилля. Основные свойства собственных значений и собственных функций. Рассмотрим основные свойства решений задачи Штурма — Лиувилля. Простейшие из таких свойств можно получить с помощью тождества

$$\int_{x_1}^{x_2} (fLg - gLf)\, dx = k(x) W(f, g)\Big|_{x_1}^{x_2}, \tag{8}$$

где

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

*) Представление решения в виде $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) v_n(x, y, z)$ удобно при решении не только уравнений вида (1), но также и более общих неоднородных уравнений

$$\rho(x, y, z)\left[A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = Lu + F(x, y, z, t)$$

(см., например, [5, 17]).

есть вронскиан. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — два решения задачи Штурма — Лиувилля, соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как в силу (7)

$$\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0, \quad \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0,$$

то, рассматривая эти равенства как систему линейных однородных уравнений относительно постоянных α_1, β_1, находим, что эти уравнения могут иметь нетривиальные решения лишь в случае, когда $W(y_1, y_2)|_{x=a} = 0$. Аналогично доказывается, что $W(y_1, y_2)|_{x=b} = 0$. Поэтому из (8) при $x_1 = a$, $x_2 = b$, $f(x) = y_1(x)$, $g(x) = y_2(x)$ получаем, что

$$\int_a^b (y_1 L y_2 - y_2 L y_1)\, dx = 0.$$

В силу (6) и того, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, это равенство можно переписать в виде

$$\int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{9}$$

Таким образом, *собственные функции задачи Штурма — Лиувилля* (6), (7), *соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на интервале* (a, b) *с весом* $\rho(x)$.

С помощью этого свойства легко показать, что *собственные значения задачи Штурма — Лиувилля вещественны*, если коэффициенты уравнения (6) и постоянные α_i, β_i в условиях (7) являются вещественными. Действительно, предположим, что имеется собственная функция $y(x)$ задачи Штурма — Лиувилля, соответствующая комплексному собственному значению λ. Переходя в (6), (7) к комплексно сопряженным величинам, легко убедиться в том, что $y^*(x)$ является собственной функцией, отвечающей собственному значению λ^*. Если предположить, что $\lambda \neq \lambda^*$, то из равенства (9) получаем

$$\int_a^b |y(x)|^2 \rho(x)\, dx = 0,$$

что невозможно в силу того, что $\rho(x) > 0$, $y(x) \not\equiv 0$.

В задачах, представляющих физический интерес, часто требуется определять собственные функции и собственные значения краевой задачи для случая, когда коэффициенты уравнения (6) имеют какую-либо особенность при $x \to a$ ($k(x) \to 0$ или $q(x) \to \infty$ и т. д.). Все рассмотренные выше свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля сохраняются и в этом случае при довольно общих условиях, наложенных на поведение коэффициентов уравнения (6) при $x \to a$. В таких случаях вместо первого из граничных условий (7) часто используют требование ограниченности при $x \to a$ решения задачи Штурма — Лиувилля.

При решении задачи Штурма — Лиувилля для уравнений, не имеющих особенности, собственные функции определяются из однородных граничных условий вида (7) как при $x=a$, так и при $x=b$. При этом свойства ортогональности собственных функций и вещественности собственных значений основываются на свойстве самосопряженности оператора L для класса функций, имеющих непрерывную вторую производную на интервале (a, b):

$$\int_a^b (fLg - gLf)\,dx = 0.$$

Согласно (8) имеем

$$\int_a^b (fLg - gLf)\,dx = k(x)\,W(f, g)\Big|_a^b.$$

Если функции f, g удовлетворяют однородным граничным условиям как при $x=a$, так и при $x=b$, то оператор L будет самосопряженным за счет того, что

$$W(f,\ g)|_{x=a,\,b} = (fg' - gf')|_{x=a,\,b} = 0.$$

Пусть теперь точка $x=a$ будет особой точкой уравнения. Тогда свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для уравнений без особенности, очевидно, сохраняются и для уравнений с особенностью, если из условия ограниченности при $x=a$ будет вытекать условие

$$k(x)(fg' - gf')|_{x=a} = 0.$$

Классификация собственных чисел и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля может быть произведена на основе осцилляционных свойств решений этой задачи.

3. Осцилляционные свойства решений задачи Штурма — Лиувилля. Осцилляционные свойства решений уравнения

$$[k(x)y']' + g(x)y = 0 \tag{10}$$

при $k(x) > 0$ удобно изучать с помощью замены переменных

$$y = r(x)\sin\varphi(x), \quad ky' = r(x)\cos\varphi(x). \tag{11}$$

Получим уравнения для неизвестных функций $r(x)$, $\varphi(x)$:

$$k(x)\,y' = k(x)\,(r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi) = r\cos\varphi,$$

$$g(x)\,y = -[k(x)\,y']' = -r'\cos\varphi + r\varphi'\sin\varphi = gr\sin\varphi.$$

Отсюда

$$r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi = \frac{r}{k}\cos\varphi,$$

$$-r'\cos\varphi + r\varphi'\sin\varphi = gr\sin\varphi.$$

Решая эту систему относительно φ', r', приходим к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)}\cos^2\varphi + g(x)\sin^2\varphi, \quad r' = \frac{1}{2}r\left(\frac{1}{k} - g\right)\sin 2\varphi. \qquad (12)$$

Из последнего уравнения находим

$$r(x) = r(x_0)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{1}{k(t)} - g(t)\right]\sin 2\varphi(t)\,dt\right\},$$

откуда следует, что функция $r(x)$ знакопостоянна. Поэтому все изменения знаков функций $y(x)$ и $y'(x)$ связаны с изменением знаков функций $\sin\varphi(x)$ и $\cos\varphi(x)$, т. е. для изучения осцилляционных свойств решений уравнения (10) достаточно ограничиться изучением поведения решения первого из уравнений (12).

Теорема 1 (теорема сравнения). *Пусть функции* $\varphi(x)$, $\bar\varphi(x)$ — *решения уравнений*

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)}\cos^2\varphi + g(x)\sin^2\varphi,$$

$$\bar\varphi' = \frac{1}{\bar k(x)}\cos^2\bar\varphi + \bar g(x)\sin^2\bar\varphi,$$

причем $\bar\varphi(x_0) = \varphi(x_0)$. *Если* $1/\bar k(x) \geqslant 1/k(x)$, $\bar g(x) \geqslant g(x)$, *то*

$$\bar\varphi(x) \geqslant \varphi(x), \quad x > x_0,$$

$$\bar\varphi(x) \leqslant \varphi(x), \quad x < x_0.$$

Доказательство. Положим

$$\frac{1}{k_\nu(x)} = \frac{1}{k(x)} + \nu\left[\frac{1}{\bar k(x)} - \frac{1}{k(x)}\right],$$

$$g_\nu(x) = g(x) + \nu\left[\bar g(x) - g(x)\right],$$

где ν — параметр, принимающий значения от 0 до 1. Рассмотрим уравнение

$$\varphi_\nu' = \frac{1}{k_\nu(x)}\cos^2\varphi_\nu + g_\nu(x)\sin^2\varphi_\nu \qquad (13)$$

с начальным условием $\varphi_\nu(x_0) = \varphi(x_0)$. Так как $k_0(x) = k(x)$, $k_1(x) = \bar k(x)$, $g_0(x) = g(x)$, $g_1(x) = \bar g(x)$, то $\varphi_0(x) = \varphi(x)$, $\varphi_1(x) = \bar\varphi(x)$. Пусть $\psi_\nu(x) = \partial\varphi_\nu(x)/\partial\nu$. Из (13) имеем

$$\psi_\nu' = a_\nu(x)\psi_\nu + b_\nu(x), \quad \psi_\nu(x_0) = 0,$$

где

$$a_\nu = (g_\nu - 1/k_\nu)\sin 2\varphi_\nu, \quad b_\nu = (1/\bar k - 1/k)\cos^2\varphi_\nu + (\bar g - g)\sin^2\varphi_\nu.$$

Очевидно, что $b_\nu(x) \geqslant 0$. Решение линейного неоднородного уравнения для $\psi_\nu(x)$ имеет вид

$$\psi_\nu(x) = \int_{x_0}^{x} b_\nu(t) \exp\left\{\int_t^x a_\nu(s)\,ds\right\} dt.$$

Из этого выражения видно, что $\psi_\nu(x) \geqslant 0$ при $x > x_0$ и $\psi_\nu(x) \leqslant 0$ при $x < x_0$. Утверждение теоремы следует из очевидного равенства

$$\bar{\varphi}(x) - \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial \nu}\,d\nu = \int_0^1 \psi_\nu(x)\,d\nu.$$

Замечание. Если в одном из условий теоремы имеем строгое неравенство на части интервала (x_0, x), то в соответствующем утверждении также имеем строгое неравенство. Это вытекает из того, что $b_\nu(t) > 0$ на рассматриваемой части интервала (x_0, x).

Отметим также следующее свойство функции $\varphi(x)$. Так как в точках, где $\varphi(x) = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, будет $\varphi'(x) > 0$, то в случае выполнения неравенства $\varphi(x_0) \geqslant \pi n$ при $x > x_0$ будет иметь место неравенство $\varphi(x) > \pi n$. В противном случае найдется такая точка $x_1 > x_0$, для которой $\varphi(x_1) = \pi n$, $\varphi'(x_1) \leqslant 0$, что невозможно. В частности, если $\varphi(x_0) \geqslant 0$, то $\varphi(x) > 0$ при $x > x_0$.

Число нулей функции $y(x)$ на интервале (a, b) в силу представления $y = r \sin \varphi$ равно числу точек на этом интервале, в которых $\varphi(x) = \pi n$. Из только что рассмотренного свойства вытекает, что число нулей функции $y(x)$ равно числу целых чисел, заключенных между $\varphi(a)/\pi$ и $\varphi(b)/\pi$.

Рассмотрим теперь осцилляционные свойства решений задачи Штурма — Лиувилля:

$$\begin{gathered}[k(x)y']' + g(x, \lambda)y = 0, \quad g(x, \lambda) = \lambda\rho(x) - q(x),\\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,\\ k(x) > 0, \quad \rho(x) > 0, \quad x \in [a, b].\end{gathered} \tag{14}$$

В результате замены $y = r \sin \varphi$, $ky' = r \cos \varphi$ приходим к следующему уравнению для $\varphi(x)$:

$$\varphi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \varphi + g(x, \lambda) \sin^2 \varphi.$$

Граничные условия (14), используя (11), можно переписать в виде

$$\operatorname{ctg} \varphi(a) = -\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1}, \quad \operatorname{ctg} \varphi(b) = -\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}.$$

Первое граничное условие будет выполнено, если положить

$$\varphi(a) = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1}\right)$$

(при $\beta_1 = 0$ положим $\varphi(a) = 0$). Тогда $0 \leqslant \varphi(a) < \pi$ и, следовательно, $\varphi(b)>0$. Второе граничное условие служит для определения собственных значений λ:

$$\varphi(b)\equiv\varphi(b,\lambda)=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}\right)+\pi n,$$

где n — целое неотрицательное число (при $\beta_2=0$ положим $\operatorname{arcctg}(-\alpha_2 k(b)/\beta_2)=\pi$).

Теорема 2 (осцилляционная теорема). *Задача Штурма — Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ Собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda=\lambda_n$, имеют ровно n нулей в интервале (a, b).*

Доказательство. Пусть $\lambda=\lambda_n$ есть корень уравнения

$$\varphi(b,\lambda)=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}\right)+\pi n, \tag{15}$$

где n — целое неотрицательное число. Так как $0\leqslant\varphi(a)<\pi$, $\pi n<\varphi(b,\lambda_n)\leqslant\pi(n+1)$, то в интервале (a, b) между числами $\varphi(a)/\pi$ и $\varphi(b,\lambda_n)/\pi$ содержится ровно n целых чисел. Как было показано ранее, это означает, что функция $y(x)=r(x)\sin\varphi(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda=\lambda_n$, имеет ровно n нулей в интервале (a, b).

Докажем теперь, что уравнение (15) имеет в точности один корень при любом фиксированном значении $n=0, 1, \ldots$ Так как функция $g(x,\lambda)=\lambda\rho(x)-q(x)$ растет с ростом λ, $\varphi(a)$ не зависит от λ, то по теореме сравнения величина $\varphi(x)=\varphi(x,\lambda)$ при фиксированном значении $x>a$ является монотонно возрастающей функцией λ. Поэтому уравнение (15) при фиксированном значении n может иметь лишь один корень $\lambda=\lambda_n$, причем $\lambda_{n+1}>\lambda_n$. Следовательно, все собственные значения можно занумеровать по числу n, принимающему значения $n=0, 1, \ldots$

Для того чтобы доказать, что уравнение (15) имеет корень при любом значении $n=0, 1, \ldots$, достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi(b,\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(b,\lambda)=+\infty. \tag{16}$$

Воспользуемся теоремой сравнения. Пусть в задаче Штурма — Лиувилля функции $k(x)$, $g(x,\lambda)$ заменены соответственно на постоянные $\bar{k}$, $\bar{g}(\lambda)$ и $\tilde{k}$, $\tilde{g}(\lambda)$, причем

$$\frac{1}{\bar{k}}\leqslant\frac{1}{k(x)}\leqslant\frac{1}{\tilde{k}},\quad \bar{g}(\lambda)\leqslant g(x,\lambda)\leqslant\tilde{g}(\lambda).$$

Тогда для соответствующих функций $\varphi(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$ получим уравнения

$$\varphi'=\frac{1}{k(x)}\cos^2\varphi+g(x,\lambda)\sin^2\varphi,$$

$$\bar{\varphi}'=\frac{1}{\bar{k}}\cos^2\bar{\varphi}+\bar{g}(\lambda)\sin^2\bar{\varphi},\quad \tilde{\varphi}'=\frac{1}{\tilde{k}}\cos^2\tilde{\varphi}+\tilde{g}(\lambda)\sin^2\tilde{\varphi}.$$

Если в граничных условиях (14) постоянные α_1, β_1 заменить соответственно на $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$ и $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\beta}_1$, которые выбираются из условия $\varphi(a)=\bar{\varphi}(a)=\tilde{\varphi}(a)$*), то по теореме сравнения при $x>a$ будут иметь место неравенства

$$\bar{\varphi}(x, \lambda) \leqslant \varphi(x, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(x, \lambda)$$

и, в частности,

$$\bar{\varphi}(b, \lambda) \leqslant \varphi(b, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(b, \lambda).$$

Поэтому предельные соотношения (16) будут вытекать из аналогичных соотношений для $\bar{\varphi}(b, \lambda)$ и $\tilde{\varphi}(b, \lambda)$.

Для определения функций $\bar{\varphi}(x, \lambda)$, $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ решим уравнения для $\bar{y}(x, \lambda)$, $\tilde{y}(x, \lambda)$:

$$\bar{y}'' + \frac{\bar{g}(\lambda)}{\bar{k}}\bar{y} = 0, \tag{17}$$

$$\tilde{y}'' + \frac{\tilde{g}(\lambda)}{\tilde{k}}\tilde{y} = 0. \tag{18}$$

Так как $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} g(x,\lambda) = -\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} g(x,\lambda) = +\infty$, то будем считать, что аналогичные соотношения выполнены и для функций $\bar{g}(\lambda)$, $\tilde{g}(\lambda)$. Покажем, что $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \bar{\varphi}(b,\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \tilde{\varphi}(b,\lambda) = 0$. Решение уравнения (17), удовлетворяющее условию $\bar{\alpha}_1\bar{y}(a)+\bar{\beta}_1\bar{y}'(a)=0$, имеет вид

$$\bar{y}(x,\lambda) = \begin{cases} A\left[\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-a) - \bar{\beta}_1\operatorname{ch}\omega(x-a)\right], & \bar{g}(\lambda)<0, \\ A\sin(\omega(x-a)+\varphi_0), & \bar{g}(\lambda)>0, \end{cases}$$

где $\omega = \sqrt{|\bar{g}/\bar{k}|}$, $\bar{\alpha}_1\sin\varphi_0 + \bar{\beta}_1\omega\cos\varphi_0 = 0$.

Функция $\bar{y}(x, \lambda)$ при $x>a$ не имеет нулей, если $\bar{g}(\lambda)\to-\infty$, так как в этом случае

$$\bar{y}(x,\lambda) \approx \begin{cases} -A\bar{\beta}_1\operatorname{ch}\omega(x-a), & \bar{\beta}_1\neq 0, \\ A\dfrac{\bar{\alpha}_1}{\omega}\operatorname{sh}\omega(x-a), & \bar{\beta}_1 = 0. \end{cases}$$

Это означает, что $0<\bar{\varphi}(x, \lambda)<\pi$ при $x>a$, если λ — любое достаточно большое по модулю отрицательное число. Кроме того,

---

*) Это условие будет выполнено, если

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}k(a) = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1}\bar{k} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\tilde{\beta}_1}\tilde{k}.$$

как нетрудно видеть,

$$\operatorname{ctg} \bar{\varphi}(x, \lambda) = \bar{k} \frac{\bar{y}'(x, \lambda)}{\bar{y}(x, \lambda)} \to +\infty, \qquad \lambda \to -\infty.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \bar{\varphi}(x, \lambda) = 0$.

Пусть теперь $\lambda \to +\infty$. Тогда из явного выражения для $\bar{y}(x, \lambda)$ видно, что эта функция может иметь произвольно большое число нулей на интервале (a, b), т. е. $\bar{\varphi}(b, \lambda) \geqslant \pi n$ при любом $n > 0$ для достаточно большого положительного значения λ. Поэтому $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \bar{\varphi}(b, \lambda) = +\infty$.

Мы доказали предельные соотношения для функции $\bar{\varphi}(x, \lambda)$. Аналогично доказываются эти соотношения и для $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$. Так как

$$\bar{\varphi}(x, \lambda) \leqslant \varphi(x, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(x, \lambda),$$

то $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varphi(b, \lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \varphi(b, \lambda) = +\infty$. Теорема доказана.

Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы, дают возможность просто оценить собственные значения λ. Пусть $\bar{\lambda}_n$ и $\tilde{\lambda}_n$ соответствуют функциям $\bar{k}(x)$, $\bar{g}(x, \lambda)$ и $\tilde{k}(x)$, $\tilde{g}(x, \lambda)$, причем

$$\frac{1}{\bar{k}(x)} \leqslant \frac{1}{k(x)} \leqslant \frac{1}{\tilde{k}(x)}, \quad \bar{g}(x, \lambda) \leqslant g(x, \lambda) \leqslant \tilde{g}(x, \lambda),$$

$$\frac{\alpha_1 k(a)}{\beta_1} = \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{k}(a)}{\bar{\beta}_1} = \frac{\tilde{\alpha}_1 \tilde{k}(a)}{\tilde{\beta}_1}, \quad \frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2} = \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{k}(b)}{\bar{\beta}_2} = \frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{k}(b)}{\tilde{\beta}_2},$$

где α_i, β_i, $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$, $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i$ — постоянные, входящие в граничные условия вида (14).

Так как $\bar{\varphi}(a) = \tilde{\varphi}(a) = \varphi(a)$, то по теореме сравнения $\bar{\varphi}(b, \lambda) \leqslant \varphi(b, \lambda) \leqslant \tilde{\varphi}(b, \lambda)$. Кроме того,

$$\varphi(b, \lambda_n) = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}\right) + \pi n,$$

$$\bar{\varphi}(b, \bar{\lambda}_n) = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\bar{\alpha}_2 \bar{k}(b)}{\bar{\beta}_2}\right) + \pi n,$$

$$\tilde{\varphi}(b, \tilde{\lambda}_n) = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{k}(b)}{\tilde{\beta}_2}\right) + \pi n,$$

откуда $\varphi(b, \lambda_n) = \bar{\varphi}(b, \bar{\lambda}_n) = \tilde{\varphi}(b, \tilde{\lambda}_n)$. Поэтому в силу монотонного возрастания функций $\varphi(b, \lambda)$, $\bar{\varphi}(b, \lambda)$, $\tilde{\varphi}(b, \lambda)$ с ростом λ имеем $\tilde{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \bar{\lambda}_n$.

Рассмотрим также еще один удобный способ оценки снизу собственных значений в важном для приложений случае, когда

$\alpha_1\beta_1 \leqslant 0$, $\alpha_2\beta_2 \geqslant 0$. Для получения такой оценки умножим уравнение

$$[k(x)y']' + [\lambda\rho(x) - q(x)]y = 0$$

на $y(x)$ и проинтегрируем его по x от a до b. Имеем

$$\lambda = -\frac{\int\limits_a^b yLy\,dx}{\int\limits_a^b y^2\rho\,dx} = \frac{\int\limits_a^b qy^2dx - \int\limits_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx}{\int\limits_a^b y^2\rho\,dx}.$$

С другой стороны,

$$-\int\limits_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx = -kyy'\Big|_a^b + \int\limits_a^b k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Для оценки подстановки воспользуемся граничными условиями (14), умножив первое из них на $(\alpha_1 y' + \beta_1 y)|_{x=a}$, а второе на $(\alpha_2 y' + \beta_2 y)|_{x=b}$. В результате получим

$$yy'|_{x=a} = -\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}(y^2 + y'^2)|_{x=a} \geqslant 0,$$

$$yy'|_{x=b} = -\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}(y^2 + y'^2)|_{x=b} \leqslant b.$$

Поэтому $-\int\limits_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx \geqslant 0$, откуда следует, что

$$\lambda \geqslant \int\limits_a^b qy^2dx \Big/ \int\limits_a^b y^2\rho\,dx.$$

Так как $\rho(x) > 0$, то по теореме о среднем

$$\int\limits_a^b qy^2dx = \left(\frac{q}{\rho}\right)\Big|_{x=x^*}\int\limits_a^b y^2\rho\,dx, \qquad x^* \in (a, b).$$

Таким образом,

$$\lambda \geqslant \min_{x\in(a,b)} \frac{q(x)}{\rho(x)}. \tag{19}$$

В случае, когда собственные функции $y(x) \neq \mathrm{const}$, будет иметь место строгое неравенство, так как

$$\int\limits_a^b k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx > 0.$$

4. Разложение функций по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. При решении краевых задач математической физики широко используются *разложения функций по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x), \tag{20}$$

где $y_n(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda = \lambda_n$. Коэффициенты a_n находятся из свойств ортогональности собственных функций:

$$a_n = \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx \Big/ \int_a^b y_n^2(x)\, \rho(x) dx. \tag{21}$$

В частном случае задачи Штурма — Лиувилля, когда $k(x) = 1$, $\rho(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, собственные функции $y_n(x)$ имеют вид

$$y_n(x) = A_n \sin\frac{\pi n}{l}(x-a), \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi n}{l}},$$

а при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$y_n(x) = B_n \cos\frac{\pi n}{l}(x-a), \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{\pi n}{l}}, \quad l = b - a.$$

В этих случаях разложение (20) является известным разложением в ряд Фурье соответственно по синусам или по косинусам.

В общем случае условия, при которых справедливо разложение (20), можно свести к условиям разложимости функции в ряд Фурье тем же способом, который был описан в § 8 для классических ортогональных полиномов (см. теорему равносходимости).

5. Краевые задачи для уравнения Бесселя. В качестве примера решения краевых задач математической физики методом разделения переменных рассмотрим решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

в бесконечном цилиндре $r < r_0$ с граничными условиями

$$\left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=r_0} = 0 \tag{22}$$

и с какими-либо начальными условиями, не зависящими от расстояний вдоль оси цилиндра (α, β — постоянные).

Если использовать цилиндрические координаты, то естественно предположить, что $u = u(r, \varphi, t)$. Будем искать частное решение задачи методом разделения переменных, полагая

$$u = T(t) R(r) \Phi(\varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

получим

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T'}{T}=\frac{1}{rR}\cdot(rR')'+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda,$$

где λ — постоянная, так как левая часть равенства не зависит от r, φ, а правая от t. Уравнение для функции $T(t)$ дает

$$T(t)=e^{-\lambda a^2 t}.$$

Далее, имеем

$$\frac{r}{R}(rR')'+\lambda r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu,$$

где μ — постоянная. Решая уравнение для $\Phi(\varphi)$, получим

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\mu}\,\varphi+B\sin\sqrt{\mu}\,\varphi.$$

Так как из физических соображений функция $u(r, \varphi, t)$ должна быть однозначной, то функция $\Phi(\varphi)$ должна удовлетворять условию периодичности

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi),$$

откуда $\mu=n^2$, где $n=0, 1, \ldots$ Поэтому функция $R(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$R''+\frac{1}{r}R'+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0, \tag{23}$$

которое является частным случаем уравнения Ломмеля (14.4). По физическому смыслу функция $u(r, \varphi, t)$ должна быть ограниченной при $r\leqslant r_0$ и, в частности, при $r\to 0$. Поэтому с точностью до множителя

$$R(r)=J_n(\sqrt{\lambda}\,r).$$

Согласно (22) функция $R(r)$ должна удовлетворять граничному условию

$$[\alpha R(r)+\beta R'(r)]\,|_{r=r_0}=0, \tag{24}$$

откуда получаем уравнение для определения возможных значений постоянной λ:

$$\alpha J_n(z)+\gamma z J_n'(z)=0, \tag{25}$$

где $z=\sqrt{\lambda}\,r_0$, $\gamma=\beta/r_0$.

Общее решение поставленной задачи представим в виде суперпозиции полученных частных решений:

$$u(r, \varphi, t)=\sum_{n,m=0}^{\infty}e^{-\lambda_{nm}a^2 t}(A_{nm}\cos n\varphi+B_{nm}\sin n\varphi)\,J_n\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\,r\right)$$

(суммирование производится по всем различным собственным значениям λ). Постоянные A_{nm}, B_{nm} определяются из начальных условий с помощью свойств ортогональности собственных функций.

Естественным обобщением задачи (23), (24) является задача о нахождении собственных функций и собственных значений для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(\lambda x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0,\quad \nu\geqslant 0, \tag{26}$$

с граничным условием $[\alpha y(x)+\beta y'(x)]|_{x=l}=0$ и условием ограниченности при $x\to 0$. Условию ограниченности в окрестности точки $x=0$ при заданных значениях λ и $\nu\geqslant 0$ удовлетворяет лишь одно из двух линейно независимых решений уравнения (26):

$$y_\lambda(x)=J_\nu(sx),\quad s=\sqrt{\lambda}.$$

Уравнение (26) имеет особенность при $x\to 0$. Поэтому для того, чтобы основные свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля сохранялись и для этого уравнения, необходимо проверить, что при $x\to 0$ $k(x)W[y_{\lambda_1}(x),y_{\lambda_2}(x)]\to 0$. Используя разложение функции $J_\nu(sx)$ в степенной ряд, получим

$$k(x)W\left[y_{\lambda_1}(x),\,y_{\lambda_2}(x)\right]=$$
$$=x\left[J_\nu(s_1x)\frac{d}{dx}J_\nu(s_2x)-J_\nu(s_2x)\frac{d}{dx}J_\nu(s_1x)\right]=$$
$$=x\left\{\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\left[(s_1x)^\nu\nu s_2(s_2x)^{\nu-1}-(s_2x)^\nu\nu s_1(s_1x)^{\nu-1}\right]+\right.$$
$$\left.+O\left(x^{2\nu+1}\right)\right\}=O\left(x^{2\nu+2}\right)\to 0,\quad x\to 0.$$

Мы приходим к следующим утверждениям.

1. *Собственными функциями рассматриваемой задачи являются функции*

$$y_{\nu n}(x)=J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x),\quad n=0,\,1,\,\ldots,$$

а собственные значения определяются из уравнения

$$\alpha J_\nu(z)+\gamma zJ'_\nu(z)=0, \tag{27}$$

где $z=\sqrt{\lambda}\,l$, $\gamma=\beta/l$.

Если $\alpha/\gamma+\nu<0$, то уравнение (27) будет иметь один корень, соответствующий собственному значению $\lambda<0$. Для такого значения λ во всех дальнейших выкладках следует заменить $\sqrt{\lambda}$ и $J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)$ соответственно на $i\sqrt{-\lambda}$ и $e^{i\pi\nu/2}I_\nu(\sqrt{-\lambda}\,x)$.

2. *Собственные функции* $J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x)$ *ортогональны с весом* $\rho(x)=x$ *на интервале* $(0,\ l)$, *т. е.*

$$\int_0^l J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x)\,J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu m}}\,x)\,x\,dx=0,\quad m\neq n.$$

Для вычисления квадрата нормы собственных функций воспользуемся тождеством

$$\int_0^l y_\lambda(x)\,y_\mu(x)\,\rho(x)\,dx=\frac{1}{\lambda-\mu}\,k(x)\,W\,[y_\lambda(x),\ y_\mu(x)]\Big|_0^l=$$

$$=\frac{1}{\lambda-\mu}\,W\,[y_\lambda(x),\ y_\mu(x)]\,|_{x=l}\qquad(28)$$

(аналогичное тождество использовалось при доказательстве ортогональности собственных функций задачи Штурма — Лиувилля).

Переходя в (28) к пределу при $\mu\to\lambda$ и используя правило Лопиталя раскрытия неопределенности, получим

$$\int_0^l y_\lambda^2(x)\,\rho(x)\,dx=k(x)\,W\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial\lambda},\ y_\lambda\right)\Big|_{x=l},$$

откуда

$$N_{\nu n}^2=\int_0^l xJ_\nu^2(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x)\,dx=\frac{x}{2\sqrt{\lambda}}W\left[xJ_\nu'(\sqrt{\lambda}\,x),\ J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)\right]\Big|_{\substack{x=l\\ \lambda=\lambda_{\nu n}}}$$

(производная берется по аргументу функции Бесселя). Вронскиан легко вычисляется, если выразить вторую производную через первую производную и саму функцию с помощью уравнения Бесселя. В результате получим

$$N_{\nu n}^2=\frac{l^2}{2}\left\{[J_\nu'(z)]^2+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)J_\nu^2(z)\right\}\Big|_{z=\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,l}.\qquad(29)$$

Уравнение (26) имеет особенность при $x\to0$. Однако можно показать, что осцилляционная теорема для поставленной задачи сохраняет силу, так что уравнение (27) имеет бесконечное число корней $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, причем собственные функции $y_\lambda(x)$, соответствующие собственному значению $\lambda=\lambda_{\nu n}$, имеют ровно n нулей в интервале $(0,\ l)$. По теореме сравнения собственные значения $\lambda=\lambda_{\nu n}$ растут с ростом ν.

6. Разложения Дини и Фурье — Бесселя. Интеграл Фурье — Бесселя *). Разложение

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{\nu n}J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x),\qquad(30)$$

*) Теория разложений Фурье — Бесселя и Дини дана в [3].

где

$$a_{\nu n} = \frac{1}{N_{\nu n}^2} \int\limits_0^l x f(x) J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}} x)\, dx, \tag{31}$$

называется *разложением Дини* функций $f(x)$. Здесь $\lambda_{\nu n}$ — корень уравнения (27), а квадрат нормы вычисляется по формуле (29). Если уравнение (27) имеет вид $J_\nu(z) = 0$, что соответствует случаю $\gamma = 0$, то разложение (30) называется *разложением Фурье — Бесселя*. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция $\sqrt{x} f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке* $[0, l]$, *и пусть* $\nu \geqslant -1/2$. *Тогда при* $0 < x < l$ *разложение* (30) *имеет место одновременно с соответствующим разложением в обычный ряд Фурье.*

В задачах математической физики часто используется предельный вид разложения Фурье — Бесселя, получающийся из (30) при $l \to \infty$. Мы получим это разложение с помощью не очень строгих рассуждений. Согласно (29)—(31)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^l x f(x) J_\nu(k_n x)\, dx}{\frac{l^2}{2} [J'_\nu(k_n l)]^2} J_\nu(k_n x), \tag{32}$$

где значения k_n определяются из уравнения

$$J_\nu(k_n l) = 0. \tag{33}$$

Первые члены ряда (32) при $l \to \infty$ не дают вклада в силу наличия множителя l^2 в знаменателе. Поэтому для вывода можно воспользоваться асимптотическими значениями k_n при достаточно больших n. С помощью (33) получим

$$\cos\left(k_n l - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0,$$

откуда

$$k_n l \approx \pi n + \text{const}.$$

Вычисляя $J'_\nu(k_n l)$ по формуле дифференцирования, получим

$$[J'_\nu(k_n l)]^2 = [J_{\nu+1}(k_n l)]^2 \approx \frac{2}{\pi (k_n l)} \sin^2\left(k_n l - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx \frac{2}{\pi k_n l}$$

($\sin^2(k_n l - \pi\nu/2 - \pi/4) \approx 1$, так как $\cos(k_n l - \pi\nu/2 - \pi/4) \approx 0$). В силу того, что $\Delta k_n = k_{n+1} - k_n \approx \pi/l$, разложение (32) можно переписать в виде

$$f(x) \approx \sum_{k_n=0}^{\infty} k_n J_\nu(k_n x)\, \Delta k_n \int\limits_0^l x f(x) J_\nu(k_n x)\, dx.$$

Так как $\Delta k_n \to 0$ при $l \to \infty$, то, заменяя суммирование по значениям k_n интегрированием, получим

$$f(x) = \int_0^\infty kF(k)\, J_\nu(kx)\, dk, \tag{34}$$

$$F(k) = \int_0^\infty xf(x)\, J_\nu(kx)\, dx. \tag{35}$$

Разложение (34) называется *интегралом Фурье — Бесселя.*

Теорема 4. *Пусть функция* $\sqrt{x}\, f(x)$ *абсолютно интегрируема на интервале* $(0, \infty)$, *и пусть* $\nu \geqslant -1/2$. *Тогда при* $x > 0$ *разложение* (34), (35) *имеет место одновременно с соответствующим разложением в интеграл Фурье.*

Заметим, что при $\nu = \pm 1/2$ разложения (30) и (34) сводятся к разложениям функции $\sqrt{x}\, f(x)$ по косинусам ($\nu = -1/2$) или по синусам ($\nu = 1/2$).

§ 26. Решение некоторых основных задач квантовой механики

В § 9 рассматривался общий метод решения квантовомеханических задач для состояний дискретного спектра энергий в случае, когда эти задачи методом разделения переменных сводятся к решению дифференциальных уравнений вида

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)} u = 0, \tag{1}$$

где $\sigma(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(x)$ — полином не выше первой степени. В этом параграфе мы рассмотрим решение некоторых основных задач квантовой механики, которые можно решать методом, изложенным в § 9. Заметим, что к дифференциальным уравнениям вида (1) приводят такие важные задачи квантовой механики, как движение частицы в центрально-симметричном поле, гармонический осциллятор, решение уравнений Шредингера, Дирака и Клейна — Гордона для кулоновского потенциала, движение заряженной частицы в однородном электрическом и магнитном полях. Кроме того, к уравнению (1) приводят также многие модельные задачи атомной, молекулярной и ядерной физики, связанные с изучением процессов рассеяния, взаимодействия нейтронов с тяжелыми ядрами, анализом вращательно-колебательного спектра молекул (например решение уравнений Шредингера с потенциалами Морза, Кратцера, Вуда — Саксона, Пешля — Теллера *)).

При нахождении собственных значений энергии E и собственных функций для уравнений Шредингера, Дирака или Клей-

*) См. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т. I.— М.: Мир, 1974.