где $\bar{\rho}(s)$ и $\bar{d}_n^2$ — вес и квадрат нормы полиномов $w_n^{(c)}(x, a, b)$:

$$\bar{\rho}(s)=\frac{\Gamma(a+s+1)\,\Gamma(c+s+1)}{\Gamma(s-a+1)\,\Gamma(b-s)\,\Gamma(b+s+1)\,\Gamma(s-c+1)},$$

$$\bar{d}_n^2=\frac{\Gamma(a+c+n+1)}{n!\,(b-a-n-1)!\,\Gamma(b-c-n)}.$$

При подстановке (81) в (80) нетрудно видеть, что правая часть (80) с точностью до известного множителя $[\bar{\rho}(j_{23})(2j_{23}+1)]^{1/2}$ является полиномом по переменной $x=j_{23}(j_{23}+1)$. Степень такого полинома равна $\max(j_2-m_2)=j_{12}+m_1+j_2$. Выберем ее минимальной, т. е. положим $m_1=-j_1$. Тогда, подставляя в (80) значения коэффициентов Клебша — Гордана частного вида, для указанного полинома можно вычислить вес и коэффициент при старшей степени, полагая $j_{12}=j_1-j_2$. В результате, используя свойства ортогональности (79), находим

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12}\\ j_3 & j & j_{23}\end{Bmatrix}=(-1)^{j_1+j+j_{23}}\left[\frac{\rho(j_{23})}{(2j_{12}+1)\,d^2_{j_{12}-j_1+j_2}}\right]^{1/2}\times$$

$$\times u^{(m-m',\,m+m')}_{j_{12}-j_1+j_2}[j_{23}(j_{23}+1);\ j_3-j_2,\ j_3+j_2+1], \qquad (82)$$

где $m=j_1-j_2$, $m'=j_3-j$, $j_1\geqslant j$, $j_3\geqslant j_2$, $j_1+j\geqslant j_2+j_3$, $j_3+j\geqslant\geqslant j_1+j_2$, $\rho(s)$ и d_n^2 — вес и квадрат нормы полиномов Рака $v_n^{(\alpha,\beta)}(x, a, b)$, $x=s(s+1)$.

§ 27. Применение специальных функций в некоторых задачах вычислительной математики

1. Квадратурные формулы типа Гаусса. *Квадратурными формулами типа Гаусса* называют формулы вида

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx\approx\sum_{j=1}^n\lambda_j f(x_j), \qquad (1)$$

в которых коэффициенты λ_j и узлы x_j ($j=1, 2, \ldots, n$) подбираются таким образом, чтобы формула (1) была точной для произвольного полинома степени $2n-1$.

Если известны моменты весовой функции

$$C_k=\int_a^b x^k\rho(x)\,dx,$$

то λ_j, x_j можно найти из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n\lambda_j x_j^k=C_k,\qquad k=0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Однако обычно для построения квадратурных формул вида (1) поступают иначе. Оказывается, что узлы x_j ($j=1, 2, \ldots, n$) являются нулями полинома $p_n(x)$, ортогонального на интервале

(a, b) с весом $\rho(x)$. Для доказательства рассмотрим функцию

$$f(x) = x^k \tilde{p}_n(x),$$

где

$$\tilde{p}_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

есть полином n-й степени, нули которого являются узлами квадратурной формулы. При $k = 0, 1, \dots, n-1$ функция $f(x)$ представляет собой полином степени, не превосходящей $2n - 1$. Поэтому, если $f(x)$ подставить в (1), то квадратурная формула должна давать точное значение интеграла при любых $k < n$. Отсюда при $k = 0, 1, \dots, n - 1$ имеем

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \int_a^b x^k \tilde{p}_n(x)\rho(x)\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^k (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)|_{x=x_j} = 0.$$

Таким образом, полином $\tilde{p}_n(x)$ ортогонален к любой степени, меньшей n, и, следовательно, с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом n-й степени $p_n(x)$, ортогональным с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b). Отсюда можно сделать вывод, что для определения узлов квадратурной формулы x_j достаточно построить полином $p_n(x)$ и найти его нули.

Для нахождения коэффициентов λ_j, которые обычно называют *числами Кристоффеля*, удобно взять в (1) в качестве $f(x)$ полином степени, меньшей $2n$, который равен нулю во всех узлах, кроме $x = x_j$. В результате получим

$$\lambda_j = \frac{1}{f(x_j)} \int_a^b f(x)\rho(x)\,dx.$$

Если положить, например, $f(x) = \left[\frac{1}{x - x_j} p_n(x)\right]^2$ или $f(x) = \frac{p_n(x)}{x - x_j} p_{n-1}(x)$, то придем к следующим выражениям для чисел λ_j:

$$\lambda_j = \int_a^b \left[\frac{p_n(x)}{p'_n(x_j)(x - x_j)}\right]^2 \rho(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\lambda_j = \frac{1}{p'_n(x_j)\,p_{n-1}(x_j)} \int_a^b \frac{p_n(x)}{x - x_j} p_{n-1}(x)\rho(x)\,dx. \tag{3}$$

Из (2) видно, что $\lambda_j > 0$. Интеграл в правой части (3) легко вычисляется. Так как

$$\frac{p_n(x)}{x-x_j}=\frac{a_n}{a_{n-1}}p_{n-1}(x)+q_{n-2}(x),$$

где a_n — коэффициент при старшей степени полинома $p_n(x)$, $q_{n-2}(x)$ — полином $(n-2)$-й степени, то в силу свойств ортогональности полиномов $p_n(x)$ получаем

$$\lambda_j=\frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1}p_n'(x_j)\,p_{n-1}(x_j)}, \tag{4}$$

где $d_n^2=\int\limits_a^b p_n^2(x)\,\rho(x)\,dx$ — квадрат нормы.

Заметим, что все рассуждения, связанные с получением квадратурных формул типа Гаусса для вычисления интегралов, остаются справедливыми, если вместо интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx$ рассматривается сумма $\sum\limits_i f(x_i)\,\rho(x_i)$ (см. § 12, п. 3). В этом случае для получения узлов квадратурной формулы и чисел Кристоффеля следует использовать соответствующие ортогональные полиномы дискретной переменной. Это часто позволяет для вычисления сумм, в которые входят трудно вычисляемые функции $f(x)$, использовать суммы, содержащие значительно меньшее число слагаемых.

Рассмотрим несколько характерных примеров применения квадратурных формул типа Гаусса.

Пример 1. Так как многие специальные функции могут быть представлены в виде определенных интегралов, то использование квадратурных формул типа Гаусса для вычисления этих интегралов приводит к удобным и достаточно точным приближенным формулам для рассматриваемых специальных функций.

Из цилиндрических функций наиболее часто встречаются в приложениях функции Бесселя $J_0(z)$ и $J_1(z)$. В ряде случаев для этих функций удобно использовать приближенные формулы простого вида (в частности, при проведении расчетов на ЭВМ, когда применение формул предпочтительнее пользования таблицами). Приведем вывод некоторых приближенных формул для функций $J_0(z)$, $J_1(z)$, вытекающих из интегрального представления Пуассона. Имеем

$$J_m(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^m\int\limits_{-1}^{1}(1-s^2)^{m-1/2}\cos zs\,ds.$$

Интеграл, входящий в правую часть, при $m=0$ можно вычислить по квадратурной формуле типа Гаусса:

$$\int_{-1}^{1} f(s)\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \approx \sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(s_j).$$

Здесь s_j — нули полиномов Чебышева первого рода, ортогональных на интервале $(-1, 1)$ с весом $1/\sqrt{1-s^2}$, λ_j — числа Кристоффеля:

$$s_j = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi, \quad \lambda_j = \frac{\pi}{n}.$$

Полагая $f(s) = \cos zs$, получим следующую приближенную формулу:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\cos zs}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(z\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right).$$

Используя соотношение $J_1(z) = -J_0'(z)$, можно найти также приближенную формулу для функции $J_1(z)$:

$$J_1(z) \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\sin\left(z\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right).$$

При четных значениях n узлы s_j квадратурной формулы расположены симметрично относительно точки $s = 0$. Поэтому для случая, когда $f(s)$ — четная функция, число различных слагаемых в квадратурной формуле будет равно $n/2$. Полагая, например, $n = 6$, получим

$$J_0(z) \approx \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\cos zx_j, \quad J_1(z) \approx \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}x_j\sin zx_j.$$

Здесь

$$x_j = \cos\frac{2j-1}{12}\pi = \begin{cases}\cos(\pi/12) = 0{,}965926,\\ \cos(\pi/4) = 0{,}707107,\\ \cos(5\pi/12) = 0{,}258819.\end{cases}$$

Точность вычислений по этим формулам характеризуется табл. 5, в которой для сравнения приведены точные значения функций $J_0(z)$, $J_1(z)$ и значения, вычисленные по приближенным формулам (они обозначены через $\mathcal{J}_0(z)$, $\mathcal{J}_1(z)$).

Очевидно, что полученными формулами можно пользоваться и для комплексных z при не слишком больших значениях $|z|$.

П р и м е р 2. Рассмотрим применение квадратурных формул типа Гаусса для вычисления сумм вида

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} f(k).$$

Таблица 5

z	$J_0(z)$	$\tilde{J}_0(z)$	$J_1(z)$	$\tilde{J}_1(z)$
0,4	0,9604	0,9604	0,1960	0,1960
1,2	0,6711	0,6711	0,4983	0,4983
2,0	0,2239	0,2239	0,5767	0,5767
2,8	—0,1850	—0,1850	—0,4097	0,4097
3,6	—0,3918	—0,3918	0,09547	0,09548
4,4	—0,3423	—0,3423	—0,2028	—0,2027
5,2	—0,1103	—0,1105	—0,3432	—0,3427
6,0	0,1506	0,1496	—0,2767	—0,2748

При использовании квадратурных формул типа Гаусса сумма S_N заменяется суммой меньшего числа слагаемых:

$$S_N \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

Узлы x_j квадратурной формулы в этом случае будут нулями полинома $p_n(x)$, обладающего следующими свойствами ортогональности:

$$\sum_{k=0}^{N-1} p_n(k)\, p_m(k) = 0, \qquad m \neq n.$$

Соответствующими ортогональными полиномами будут полиномы Чебышева дискретной переменной (см. § 12). В качестве примера приведем сравнительную таблицу результатов вычисления сумм S_N при $f(k) = \sqrt{l+k}$ (l — некоторое целое число) для различного числа квадратурных точек n (табл. 6). Заметим, что при

Таблица 6

$N-1$	10		1000	
n \ l	1	10	1	10
1	26,944	42,603	22 405	22 606
3	25,808	42,360	21 207	21 453
5	25,786	42,360	21 148	21 405
N	25,785	42,360	21 129	21 395

$n = N$ квадратурная формула дает точное значение для исходной суммы.

Пример 3. Определение коэффициентов поглощения света в спектральных линиях приводит к необходимости вычисления интегралов вида *)

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{-s^2}}{(x-s)^2 + y^2}\, ds, \qquad y > 0. \tag{5}$$

*) См. Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров.— М.: Физматгиз, 1963.

Существенная для интегрирования область значений s за счет множителя e^{-s^2} соответствует значениям $|s| < 1$. В этой области функция $1/[(x-s)^2+y^2]$ при заданном значении x будет достаточно плавной функцией переменной s, если значение y сравнительно велико. Поэтому при $y > 1$ для вычисления функции $K(x, y)$ можно использовать квадратурные формулы типа Гаусса, основанные на применении полиномов Эрмита:

$$K(x,y) \approx K_1(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{y}{(x-s_j)^2+y^2}. \qquad (6)$$

Однако при малых значениях y функция $y/[(x-s)^2+y^2]$ будет иметь резкий максимум при $x=s$ и квадратурная формула (6) при небольших значениях x будет давать неудовлетворительные результаты. Чтобы избежать этого, можно предварительно преобразовать выражение для $K(x, y)$ к виду, более удобному для применения квадратурных формул типа Гаусса. Имеем

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{(x-s)-iy}\, ds.$$

Если с помощью теоремы Коши от интегрирования вдоль вещественной оси перейти к интегрированию вдоль прямой, параллельной вещественной оси, полагая $s = ai + t$ $(a > 0,\ -\infty < t < \infty)$, то получим

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(ai+t)^2}}{(x-t)-i(a+y)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}[(a+y)\cos 2at - (x-t)\sin 2at]}{(x-t)^2+(a+y)^2}\, dt. \qquad (7)$$

Благодаря такому преобразованию мы вместо функции $1/[(x-s)^2+y^2]$ с резким максимумом получили в подынтегральном выражении более плавную функцию $1/[(x-t)^2+(a+y)^2]$, которая в существенной для интегрирования области может быть достаточно точно аппроксимирована полиномом сравнительно небольшой степени. Правда, при этом в подынтегральном выражении возникает дополнительный осциллирующий множитель. Если выбрать $a \approx 1$, то в существенной для интегрирования области функция $[(a+y)\cos 2at - (x-t)\sin 2at]$ будет также достаточно плавной. Применим теперь к интегралу (7) квадратурную формулу типа Гаусса, использующую полиномы Эрмита:

$$K(x,y) \approx K_2(x,y) = \frac{e^{a^2}}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{(a+y)\cos 2as_j - (x-s_j)\sin 2as_j}{(x-s_j)^2+(a+y)^2}. \qquad (8)$$

Проведенный анализ показывает, что применение квадратурной формулы типа Гаусса к интегралу (7) даже при небольшом количестве квадратурных точек может дать хорошие результаты при любых значениях x и y, если выбрать $a \approx 1$. Для иллюстрации приведем сравнительную таблицу результатов вычисления интегралов (5) и (7) по формулам (6) и (8) при различном числе квадратурных точек для $a=1$ и различных значениях x, y (табл. 7).

Таблица 7

n	$x=0,\ y=0{,}01$		$x=1,\ y=0{,}01$	
	$K(x, y)=0{,}989$		$K(x, y)=0{,}369$	
	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$
3	37,6	1,013	0,0225	0,387
5	30,1	0,991	0,693	0,370
7	25,8	0,9895	0,0434	0,369
n	$x=0,\ y=1$		$x=1,\ y=1$	
	$K(x, y)=0{,}428$		$K(x, y)=0{,}305$	
	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$
3	0,451	0,441	0,293	0,317
5	0,434	0,428	0,305	0,305
7	0,430	0,428	0,306	0,305

В заключение приведем таблицы (табл. 8—10) значений чисел Кристоффеля λ_j и узлов x_j для вычисления различного рода интегралов по квадратурным формулам типа Гаусса*). В этих формулах в качестве узлов x_j используются нули полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита. Для полиномов Лежандра и Эрмита в таблицах выписаны лишь неотрицательные значения x_j. Следует иметь в виду, что для каждого положительного значения x_j в этом случае существует также отрицательное значение $-x_j$ с тем же весом λ_j.

Квадратурные формулы имеют вид:

$$1)\ \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

(x_j — нули полиномов Лежандра $P_n(x)$, см. табл. 8);

$$2)\ \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

(x_j — нули полиномов Лагерра $L_n^0(x)$, см. табл. 9);

*) Для чисел $\lambda_j \ll 1$ используется сокращенная запись, например, $0,(4)233699 = 0{,}0000233699$.

$$8)\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

(x_j — нули полиномов Эрмита $H_n(x)$, см. табл. 10).

Таблица 8

n	x_j	λ_j	n	x_j	λ_j
2	0,5773502692	1	8	0,1834346422 0,5355324099 0,7966664774 0,9602898565	0,3626837834 0,3137066459 0,222381035 0,1012285363
3	0 0,7745966692	0,8888888888 0,5555555555			
4	0,3399810436 0,8611363116	0,6521451549 0,3478548451	9	0 0,3242534234 0,6133714327 0,8360311073 0,9681602395	0,3302393550 0,3123470770 0,2606106964 0,1806481607 0,08127438836
5	0 0,5384693101 0,9061798459	0,5688888888 0,4786286705 0,2362688506			
6	0,2386191861 0,6612093865 0,9324695142	0,4679139346 0,3607615731 0,1713244924	10	0,1488743390 0,4333953941 0,6794095683 0,8650633667 0,9739065285	0,2955242247 0,2692667193 0,2190863625 0,1494513491 0,06667134430
7	0 0,4058451514 0,7415311856 0,9491079123	0,4179591837 0,3818300505 0,2797053915 0,1294849662			

2. Применение классических ортогональных полиномов дискретной переменной для сжатия информации. Задача хранения, сжатия и обработки информации была и остается одной из наиболее важных научно-технических задач. Необходимость рационального хранения данных диктуется не только научными, но и экономическими требованиями. Например, большое значение имеет вопрос о сжатии информации при обработке сигналов, получаемых с летательных аппаратов. При создании банков данных геофизических и сейсмических исследований осуществляется сжатие массивов результатов измерений. В медицине в связи с появлением автоматизированных диагностических систем весьма остро встал вопрос создания банков электрофизиологических данных больных. Часто бывает необходимо хранить длительный период электрокардиограммы, электроэнцефалограммы и другие характеристики каждого больного. Вообще, развитие многих научных направлений базируется на использовании большого экспериментального материала.

Кроме сжатия информации, для последующего ее хранения часто требуются и другие виды обработки информации, которые удобно проводить одновременно со сжатием. К ним относится,

Таблица 9

n	x_j	λ_j
1	1	1
2	0,5857864376	0,8535533906
	3,4142135624	0,1464466094
3	0,4157745567	0,7110930099
	2,2942803603	0,2785177336
	6,2899450829	0,0103892565
4	0,3225476896	0,6031541043
	1,7457611011	0,3574186924
	4,5366202969	0,03888790851
	9,3950709123	0,(3)53929447056
5	0,2635603197	0,5217556106
	1,4134030591	0,3986668111
	3,5964257710	0,07594244968
	7,0858100059	0,(2)3611758679
	12,6408008443	0,(4)2336997239
6	0,2228466042	0,4589646740
	1,1889321017	0,4170008308
	2,9927363261	0,1133733821
	5,7721435691	0,01039919745
	9,8374674184	0,(3)2610172028
	15,9828739806	0,(6)8985479064
7	0,1930436766	0,4093189517
	1,0266648953	0,4218312779
	2,5678767450	0,1471263487
	4,90003530845	0,02063351447
	8,1821534446	0,(2)1074010143
	12,7341802918	0,(4)1586546435
	19,3957278623	0,(7)3170315479
8	0,1702796323	0,3691885893
	0,9037017768	0,4187867808
	2,2210866299	0,1757949866
	4,2667001703	0,03334349226
	7,0429054024	0,(2)2794536235
	10,7585160102	0,(4)9076508773
	15,7406786413	0,(6)8485746716
	22,8331317369	0,(8)1048001175
9	0,1523222277	0,3361264218
	0,8072200227	0,4112139804
	2,0051351556	0,1992875254
	3,7834739733	0,04746056277
	6,2049567778	0,(2)5599626611
	9,3729852517	0,(3)3052497671
	13,4662369110	0,(5)6592123026
	18,8335977889	0,(7)4110769330
	26,3740718909	0,(10)3290874030
10	0,1377934705	0,3084411158
	0,7294545495	0,4011199292
	1,8083429017	0,1180682876
	3,4014336979	0,06208745610
	5,2224961400	0,(2)9501516975
	8,3301527468	0,(3)7530083886
	11,8437858379	0,(4)2825923350
	16,2792578314	0,(6)4249313985
	21,9965858120	0,(8)1839564824
	29,9206970122	0,(12)9911827220

прежде всего, задача подавления или сглаживания высокочастотных помех. Еще одно важное направление обработки информации заключается в получении аналитического представления экспериментальных данных. Из экономических соображений очевидна необходимость комплексного решения этих проблем: формирования информации, обработки ее в целях правильной интерпретации, а также организации рационального длительного хранения экспериментальных данных.

В настоящее время для обработки информации широко применяются различные спектральные методы, основанные на следующем. Функция $f(t)$, полученная в виде таблицы значений, графической или аналитической зависимости в результате измерений, разлагается в ряд Фурье по полной ортогональной системе

Таблица 10

n	x_j	λ_j
1	0	1,772453851
2	0,7071067812	8,8862269255
3	0 1,2247448714	1,181635901 1,2954089752
4	0,5246476233 1,6506801239	0,8049140900 0,08131283545
5	0 0,9585724646 2,0201828705	0,9453087205 0,3936193232 0,01995324206
6	0,4360774119 1,3358490740 2,3506049737	0,7246295952 0,1570673203 0,(2)4530009906
7	0 0,8162878829 1,6735516288 2,6519613568	0,8102646176 0,4256072526 0,05451558282 0,(3)9717812451
8	0,3811869902 1,1571937124 1,9816567567 2,9306374203	0,6611470126 0,2078023258 0,01707798301 0,(3)1996040722
9	0 0,7235510188 1,4685532892 2,2665805845 3,1909932018	0,7202352156 0,4326515590 0,08847452739 0,(2)4943624276 0,(4)3960697726
10	0,3429013272 1,0366108298 1,7566836493 2,5327316742 3,4361591188	0,6108626337 0,2401386111 0,03387439446 0,(2)1343645747 0,(5)7640432855

функций $\{y_n(t)\}$, $n = 0, 1, \ldots$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(t). \tag{9}$$

Коэффициенты Фурье c_n, как обычно, вычисляются с помощью соотношения ортогональности функций $y_n(t)$.

При таком преобразовании (фурье-преобразовании) исходной функции $f(t)$ решается сразу несколько задач, связанных с обработкой информации. Во-первых, запоминая несколько первых коэффициентов Фурье c_n вместо таблицы значений функции $f(t)$, мы добиваемся существенного сжатия информации об экспериментальных данных. Во-вторых, происходит разделение наиболее важных низкочастотных и, как правило, вредных высокочастотных характеристик. В-третьих, представление данных в форме разложения Фурье по ортогональной системе функций (базису) удобно для аналитической обработки, поскольку анализ данных в этом случае опирается на свойства ортогонального базиса. К тому же появляется возможность получить приближенные аналитические выражения, оставив лишь несколько первых членов разложения Фурье.

В качестве системы функций $\{y_n(t)\}$ удобно использовать классические ортогональные полиномы непрерывной и дискретной переменной. Многообразие систем классических ортогональных полиномов позволяет эффективно проводить спектральный анализ и сжатие информации, получать сравнительно простые аналитические выражения для экспериментальных данных.

Обращение к полиномам дискретной переменной обусловлено задачами, в которых экспериментальные данные заданы в виде таблицы. В подобных случаях, конечно, можно использовать и полиномы непрерывной переменной. Обычно вычисление коэффициентов Фурье c_n по системе классических ортогональных полиномов непрерывной переменной требует трудоемкого численного интегрирования. Полиномы дискретной переменной для ЭВМ предпочтительнее, так как их применение позволяет заменить интегрирование суммированием по точкам сетки:

$$\int_a^b f(t)\, y_n(t)\, \rho(t)\, dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)\, y_n(t_i)\, \rho_i. \qquad (10)$$

В качестве примера сжатия информации приведем результаты применения полиномов Чебышева дискретной переменной $t_n(x)$ для обработки электрокардиограмм. Для воспроизведения сигнала кривая $f(t)$ разбивалась на отдельные участки и для каждого участка кривой использовались лишь первые три члена разложения функции $f(t)$ по полиномам Чебышева. Размеры каждого участка подбирались таким образом, чтобы средняя квадратичная ошибка не превышала 1%. Даже такой простой алгоритм оказался достаточно эффективным: коэффициент сжатия информации находился в пределах 6—12 *).

В заключение отметим, что в связи со спектральным методом обработки информации возникает интересная задача выбора оптимального базиса классических ортогональных полиномов.

3. Применение модифицированных функций Бесселя в задачах лазерного зондирования. Функции Бесселя находят широкое применение при решении задач, возникающих в самых различных областях науки и техники. В качестве примера рассмотрим применение модифицированных функций Бесселя $I_n(z)$ в задаче лазерного зондирования атмосферы, в которой используется информация о поглощении лазерного импульса в некоторой спектральной линии интересующего нас вещества.

Изучая поглощение света в спектральных линиях, во многих случаях можно получить важные сведения о физических свойствах вещества. Так, например, в астрофизике по доплеровским сдвигам судят о скорости направленного движения вещества, а по ширине спектральных линий — о температуре вещества и его плотности.

В настоящее время для определения химического и аэрозольного состава атмосферы и, в частности, для обнаружения малых концентраций нелокализованных в атмосфере газовых примесей широко используются лазерные методы исследования. Наиболее перспективным из них является,

*) См. Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях.— В кн.: Материалы I Всесоюзного семинара «Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях на основе ортогональных базисов». Пущино, 1980, с. 21, 105.

по-видимому, метод сравнительного поглощения, основанный на использовании лазерных локаторов — лидаров.

В атмосферу посылаются лазерные импульсы на двух близких частотах ν_1 и ν_2, одна из которых (ν_1) почти совпадает с центром линии поглощения ν_a исследуемого вещества, а другая лежит вне ее, причем интервал частот (ν_1, ν_2) не перекрывается с остальными линиями поглощения. На приемник излучение поступает в результате отражения лазерного импульса от какого-либо рефлектора.

Можно показать, что отношение величины сигналов, регистрируемых приемником на частотах ν_1, ν_2, будет определяться поглощением лазерного излучения в спектральной линии исследуемого вещества на частоте ν_1, если учесть, что сечения всех остальных процессов взаимодействия излучения с веществом для близких частот ν_1 и ν_2 с достаточной степенью точности можно считать равными.

Действительно, пусть $K_л(\nu)$ — контур линии излучения, т. е. спектральная интенсивность лазерного импульса, $K_а(\nu)$ — контур линии поглощения исследуемого вещества, т. е. спектральный коэффициент поглощения света в линии с частотой $\nu = \nu_а$, рассчитанный на единицу массы, $K(\nu)$ — спектральный коэффициент поглощения для остальных процессов взаимодействия излучения с веществом. Тогда мощность лазерного излучения, зарегистрированного приемником, в предположении однородности атмосферы, будет равна

$$\int_0^\infty K_л(\nu) \exp\{-[\mu_а K_а(\nu) + K(\nu)]\, m\}\, d\nu, \tag{11}$$

где $\mu_а$ — процентное содержание (по массе) рассматриваемой компоненты вещества в атмосфере, m — масса поглощающего вещества на пути лазерного импульса: $m = LS\rho_0$ (L — путь, пройденный импульсом от лазера до приемника, S — площадь приемной антенны, ρ_0 — плотность атмосферы).

При дистанционном зондировании атмосферы используются узкополосные сигналы, для которых функция $K_л(\nu)$ существенно отлична от нуля лишь в узкой области частот $\nu \approx \nu_л$. При $\nu_л = \nu_1$ и $\nu_л = \nu_2$ в соответствующих областях частот изменением функции $K(\nu)$ можно пренебречь, т. е. в обоих случаях можно считать $K(\nu) = \mathrm{const}$. Кроме того, при $\nu_л = \nu_2$ в силу выбора частоты ν_2 можно считать, что в существенной для интегрирования области частот $K_а(\nu) = 0$. Поэтому отношение величины сигналов на частотах ν_1, ν_2 будет даваться следующим выражением:

$$T = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\int_0^\infty K_л^{(1)}(\nu) \exp\{-\mu_а K_а(\nu) \cdot m\}\, d\nu}{\int_0^\infty K_л^{(2)}(\nu)\, d\nu} \tag{12}$$

Для многих практически важных случаев реальный контур линии поглощения близок к лоренцевскому, для которого

$$K_а(\nu) = \frac{J_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma_а}{\gamma_а^2 + (\nu - \nu_а)^2},$$

где J_0 — интенсивность линии, $\gamma_а$ — полуширина.

Подобным же контуром, как правило, описывается и частотная зависимость линии лазерного излучения $K_л(\nu)$, т. е.

$$K_л^{(i)}(\nu) = \frac{P_0}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\nu - \nu_i)^2},$$

где P_0 — мощность излученного импульса, $i = 1, 2$.

Для этого случая

$$T = \frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\gamma}{\gamma^2+(\nu-\nu_1)^2}\exp\left\{-\frac{J_0 m\mu_a}{\pi}\,\frac{\gamma_a}{\gamma_a^2+(\nu-\nu_a)^2}\right\}d\nu}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\gamma}{\gamma^2+(\nu-\nu_2)^2}\,d\nu}.$$

Обычно $\gamma \ll \nu_i$, и поэтому интервал интегрирования $(0, \infty)$ можно заменить на $(-\infty, +\infty)$, практически не меняя величины T. Полагая $t = 2\operatorname{arctg}[(\nu-\nu_a)/\gamma_a]$, имеем

$$T = T(z, a, \delta) = \frac{ae^{-z}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp\{-z\cos t\}\,dt}{1+a^2(1+\delta^2)+[1-a^2(1-\delta^2)]\cos t+2a^2\delta\sin t}, \tag{13}$$

где

$$z = \frac{J_0 m\mu_a}{2\pi\gamma_a}, \quad a = \frac{\gamma_a}{\gamma}, \quad \delta = \frac{\nu_a-\nu_1}{\gamma_a}.$$

В полученном выражении все величины, от которых зависит функция T, легко определяются, за исключением μ_a. Поэтому, если величина T измерена в эксперименте, то для определения μ_a достаточно воспользоваться, например, построенным предварительно с помощью формулы (13) графиком функции $T = T(\mu_a)$.

Для вычисления интеграла (13) разложим функцию $\exp\{-z\cos t\}$ в ряд Фурье. Чтобы получить коэффициенты этого разложения, воспользуемся соотношением (16.12), заменяя в нем z на iz, φ на $\pi/2 - t$:

$$\exp\{-z\cos t\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n I_n(z)\exp\{-int\}.$$

Так как $I_{-n}(z) = I_n(z)$, то

$$\exp\{-z\cos t\} = I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(z)\cos nt.$$

Поэтому

$$T(z, a, \delta) = e^{-z}\left[I_0(z)S_0(a,\delta) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(z)S_n(a,\delta)\right],$$

где

$$S_n(a,\delta) = \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt\,dt}{1+a^2(1+\delta^2)+[1-a^2(1-\delta^2)]\cos t+2a^2\delta\sin t}.$$

Интеграл $S_n(a, \delta)$ с помощью замены $\xi = e^{it}$ приводится к контурному интегралу по единичной окружности, который можно вычислить с помощью теории вычетов:

$$S_n(a,\delta) = (-1)^n\rho^n\cos n\alpha,$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{(a-1)^2+a^2\delta^2}{(a+1)^2+a^2\delta^2}}, \quad 0 \leqslant \rho < 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - a^2(1-\delta^2)}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{2a^2\delta}{r},$$

$$r = \sqrt{[(a-1)^2 + a^2\delta^2]\,[(a+1)^2 + a^2\delta^2]}.$$

В результате получаем

$$T(z, a, \delta) = e^{-z}\left[I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n\alpha I_n(z)\right]. \tag{14}$$

Так как $\rho < 1$ и при фиксированном z и $n \to \infty$

$$I_n(z) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

то ряд (14) очень быстро сходится и поэтому удобен для вычислений. Заметим, что для функций $I_n(z)$ существуют подробные таблицы.

Полученные формулы позволяют проводить вычисления функции пропускания T при произвольных значениях γ_a, γ, μ_a, ν_1, ν_2, ν_a, а также исследовать различного рода предельные случаи.

Пусть, например, $\nu_1 = \nu_a$, т. е. частота сигнала совпадает с центром линии поглощения. В этом случае

$$\delta = 0, \quad \rho = \left|\frac{a-1}{a+1}\right|, \quad \alpha = \begin{cases} 0, & \gamma_a < \gamma, \quad a < 1, \\ \pi, & \gamma_a > \gamma, \quad a > 1. \end{cases}$$

По формуле (14) получаем

$$T(z, a, 0) = e^{-z}\left[I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n I_n(z)\right].$$

В частности, если $\gamma_a = \gamma$ ($a = 1$), то

$$T(z, 1, 0) = e^{-z} I_0(z).$$