ДОПОЛНЕНИЕ

А. Гамма-функция

Гамма-функция относится к числу наиболее простых и в то же время важных специальных функций. Знакомство с ее свойствами является необходимой предпосылкой для изучения других специальных функций. Кроме того, многие интегралы, встречающиеся в анализе, могут быть выражены через гамма-функцию. В частности, через гамма-функцию можно выразить интеграл, определяющий так называемую бета-функцию.

1. Определение функций $\Gamma(z)$ и $\mathrm{B}(u, v)$. *Гамма-функция* $\Gamma(z)$ и *бета-функция* $\mathrm{B}(u, v)$ определяются следующим образом:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad \operatorname{Re} z>0; \tag{1}$$

$$\mathrm{B}(u, v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt, \quad \operatorname{Re} u>0, \quad \operatorname{Re} v>0. \tag{2}$$

По теореме 2 из § 3 функция $\Gamma(z)$ будет аналитической в области ее определения. Действительно, интеграл (1) равномерно сходится по z в области $0<\delta\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant A$ при любых значениях A, δ, так как

$$|e^{-t}t^{z-1}|\leqslant\begin{cases} t^{\delta-1}, & 0<t\leqslant 1,\\ e^{-t}t^{A-1}, & t>1,\end{cases}$$

и интегралы $\int_0^1 t^{\delta-1}dt$ и $\int_1^\infty e^{-t}t^{A-1}dt$ сходятся.

Аналогично можно показать, что функция $\mathrm{B}(u, v)$ будет аналитической функцией каждой из переменных u, v при $\operatorname{Re} u>0$, $\operatorname{Re} v>0$.

Бета-функция может быть выражена через гамма-функцию. Для нахождения этой связи достаточно вычислить двумя способами интеграл

$$I(u, v)=\int\int e^{-(\xi^2+\eta^2)}\xi^{2u-1}\eta^{2v-1}d\xi\,d\eta,$$

в котором интегрирование производится по области $\xi>0$, $\eta>0$.

С одной стороны,

$$I(u, v) = I(u)I(v),$$

где

$$I(u) = \int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^{2u-1}d\xi = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{u-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma(u).$$

С другой стороны, переходя в выражении для $I(u, v)$ к полярным координатам $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$, получим

$$I(u,v) = \int_0^\infty e^{-r^2}r^{2u+2v-1}dr\int_0^{\pi/2}\cos^{2u-1}\varphi\sin^{2v-1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(u+v)\int_0^{\pi/2}\cos^{2u-1}\varphi\sin^{2v-1}\varphi\,d\varphi.$$

Интеграл по переменной φ можно выразить через бета-функцию $\mathrm{B}(u, v)$, если воспользоваться заменой $\cos^2\varphi = t$:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2u-1}\varphi\sin^{2v-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{B}(u,v).$$

Сопоставляя два выражения для $I(u, v)$, окончательно получим

$$\mathrm{B}(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{3}$$

2. Функциональные соотношения. Функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет следующим *функциональным соотношениям*:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{4}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z, \tag{5}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \Gamma(1/2)\Gamma(2z). \tag{6}$$

Эти соотношения играют важную роль при различных преобразованиях, связанных с гамма-функцией. Соотношение (5) называется *формулой дополнения* для гамма-функции, а соотношение (6) — *формулой удвоения*.

Для доказательства справедливости формул (4)—(6) их удобно записать, используя (3), в виде *функциональных соотношений* для бета-функции:

$$\mathrm{B}(z, 1) = 1/z, \tag{7}$$

$$\mathrm{B}(z, 1-z) = \pi/\sin\pi z, \tag{8}$$

$$2^{2z-1}\mathrm{B}(z, z) = \mathrm{B}(z, 1/2). \tag{9}$$

Соотношения (7)—(9) могут быть выведены с помощью непосредственного вычисления интеграла (2) для бета-функции

$\mathrm{B}(u, v)$. Имеем

$$\mathrm{B}(z, 1) = \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{z},$$

что совпадает с (7).

Для доказательства соотношения (8) положим в (2) $u = z$, $v = 1 - z$:

$$\mathrm{B}(z, 1-z) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}, \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$$

Произведя замену $s = t/(1-t)$, получим

$$\mathrm{B}(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s} ds.$$

Полученный интеграл можно вычислить с помощью теории вычетов. Для этого от интегрирования вдоль действительной оси перейдем к интегрированию по замкнутому контуру C, изображенному на рис. 14. Функция

$$f(s) = \frac{s^{z-1}}{1+s}, \quad 0 < \arg s < 2\pi,$$

в области, ограниченной контуром C, не имеет других особенностей, кроме полюса при $s = e^{i\pi}$. Поэтому при $R > 1$

$$\int_C f(s)\, ds = 2\pi i \operatorname*{Res}_{s=e^{i\pi}} f(s) = -2\pi i e^{i\pi z}.$$

С другой стороны, в силу условия $0 < \operatorname{Re} z < 1$, интегралы по окружностям радиусов r и R стремятся к нулю при $r \to 0$, $R \to \infty$, а интеграл по нижнему берегу разреза отличается от интеграла по верхнему берегу множителем $-e^{2\pi i z}$. В результате при $r \to 0$, $R \to \infty$ получаем

$$\mathrm{B}(z, 1-z)(1 - e^{2\pi i z}) = -2\pi i e^{i\pi z},$$

что эквивалентно (8) при $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

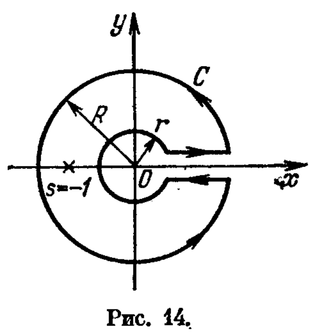

Рис. 14.

Чтобы доказать соотношение (9), положим в (2) $u = v = z$:

$$\mathrm{B}(z, z) = \int_0^1 [t(1-t)]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Так как парабола $y = t(1-t)$ симметрична относительно прямой $t = 1/2$, то

$$\mathrm{B}(z, z) = 2 \int_0^{1/2} [t(1-t)]^{z-1} dt,$$

откуда после замены $s=4t(1-t)$ получим

$$B(z, z) = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^{-1/2}\, ds = \frac{B(z, 1/2)}{2^{2z-1}},$$

что эквивалентно (9) при $\operatorname{Re} z > 0$.

Таким образом, функциональные соотношения (4)—(6) для гамма-функции доказаны.

В виде примера применения соотношений (4)—(6) вычислим значения гамма-функции $\Gamma(z)$ для целых и полуцелых значений аргумента. Из (4) следует, что

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

так как $\Gamma(1) = 1$. Отсюда видно, что гамма-функция обобщает понятие факториала. Далее, полагая в (5) $z = 1/2$, находим

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Поэтому (6) можно переписать в виде

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z). \tag{6a}$$

Полагая в этом соотношении $z = n + 1/2$, получим

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n} n!}. \tag{10}$$

Аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на область $\operatorname{Re} z > -(n+1)$ можно получить с помощью соотношения

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)(z+n)}, \tag{11}$$

вытекающего из (4). Поскольку число n можно взять произвольным, мы получаем аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ для любых значений z. Из (11) видно, что $\Gamma(z)$ *будет аналитической функцией всюду, кроме точек* $z = -n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *в которых она имеет полюсы первого порядка с вычетами*

$$\operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = (-1)^n/n!.$$

По принципу аналитического продолжения формулы (4)—(6) будут справедливы при всех значениях z, для которых они имеют смысл. Аналитическое продолжение бета-функции можно получить, используя (3).

Из (5) вытекает, что $\Gamma(z)$ *не имеет нулей на плоскости комплексной переменной* z. Действительно, пусть $\Gamma(z_0) = 0$. Очевидно, что $z_0 \neq n+1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, так как $\Gamma(n+1) = n! \neq 0$. Поэтому функция $\Gamma(1-z)$ будет аналитической при $z = z_0$. С другой стороны,

$$\lim_{z\to z_0} \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z_0} \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\Gamma(z)} = \infty,$$

что противоречит аналитичности функции $\Gamma(1-z)$ при $z \neq n+1$.

График функции $y=\Gamma(x)$ приведен на рис. 15.

3. Логарифмическая производная гамма-функции. Наряду с функцией $\Gamma(z)$ широко используется также функция

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Функция $\psi(z)$ является аналитической во всей комплексной

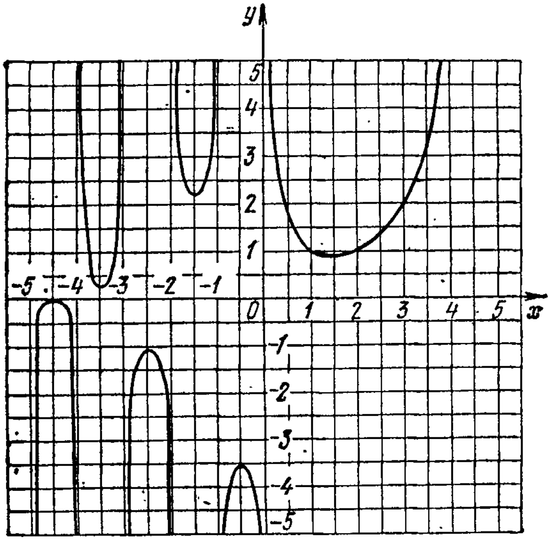

Рис. 15.

плоскости, за исключением точек $z=-n$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$, в которых она имеет простые полюсы.

Из функциональных соотношений для гамма-функции вытекают следующие *функциональные соотношения* для функции $\psi(z)$:

$$\psi(z+1)=1/z+\psi(z), \tag{12}$$

$$\psi(z)=\psi(1-z)-\pi\operatorname{ctg}\pi z, \tag{13}$$

$$2\ln 2+\psi(z)+\psi(z+1/2)=2\psi(2z). \tag{14}$$

Отметим также соотношение, легко получаемое из (12):

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k-1}. \tag{15}$$

Соотношения (12)—(15) позволяют вычислить значения $\psi(z)$ для целых и полуцелых значений аргумента. Обозначим

$$\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma.$$

Величина γ называется *постоянной Эйлера* $(\gamma=0{,}577215\ldots)$. Полагая в (14) $z=1/2$, находим

$$\psi(1/2)=-\gamma-2\ln 2.$$

При $z=1$, $z=1/2$ из (15) получаем

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \tag{16}$$

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}. \tag{17}$$

Из интегрального представления для бета-функции можно получить интегральное представление для $\psi(z)$. По определению

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Gamma(z)-\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{1}{\Delta z} - \frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\Delta z}\right].$$

Выражение $\Gamma(z-\Delta z)/(\Gamma(z)\Delta z)$ при достаточно малых $\Delta z > 0$ почти совпадает с бета-функцией:

$$B(z-\Delta z, \Delta z) = \frac{\Gamma(z-\Delta z)\Gamma(\Delta z)}{\Gamma(z)},$$

так как

$$\lim_{\Delta z\to 0} \Delta z \Gamma(\Delta z) = \lim_{\Delta z\to 0} \Gamma(1+\Delta z) = 1.$$

Величину $1/\Delta z$, входящую в предельное соотношение для $\psi(z)$, удобно исключить, рассмотрев разность $\psi(z)-\psi(1)$. Имеем

$$\psi(z)-\psi(1) = \psi(z)+\gamma = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{\Gamma(1-\Delta z)}{\Gamma(1)\Delta z} - \frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\Delta z}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{1}{\Delta z\Gamma(\Delta z)}\left[B(1-\Delta z, \Delta z) - B(z-\Delta z, \Delta z)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0} \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\Delta z} dt.$$

После перехода к пределу под знаком интеграла, что допустимо в силу равномерной сходимости интеграла при достаточно малых Δz, получим *интегральное представление* для $\psi(z)$:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{18}$$

Заменяя в (18) t на e^{-t}, получаем еще одно часто используемое интегральное представление:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{19}$$

Из интегрального представления (18) можно получить простое *представление для $\psi(z)$ в виде ряда*, если воспользоваться разложением $1/(1-t)$ по степеням t и почленным интегрированием:

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right). \tag{20}$$

4. Асимптотические представления. При выводе асимптотики функций $\Gamma(z)$ и $\psi(z)$ будем опираться на асимптотические свойства интеграла Лапласа (см. Дополнение Б)

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

Для этого предварительно преобразуем интегральное представление (19) для $\psi(z)$ следующим образом:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t}\, dt + \int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-zt}\right)\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Отсюда

$$\psi(z) = \psi_0(z) - F(z),$$

где

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1},$$

$$\psi_0(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{t}\, dt - \gamma + F(1).$$

Функция $\psi_0(z)$ выражается через элементарные функции. Действительно,

$$\psi_0'(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z},$$

откуда $\psi_0(z) = \ln z + C$. Постоянная C будет вычислена в дальнейшем.

Функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы из Дополнения Б при $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. Поэтому при $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$

$$\psi(z) = \ln z + C - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k k!}{z^{k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right),$$

где a_k — коэффициенты разложения функции $f(t)$ в ряд по степеням t. Коэффициенты a_k можно выразить через *числа Бернулли* B_k, являющиеся коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции $t/(e^t - 1)$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}, \qquad |t| < 2\pi.$$

В самом деле,

$$f(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{t^{k-1}}{k!},$$

откуда

$$a_0 = 1 + B_1, \quad a_k = B_{k+1}/(k+1)!, \quad k \geqslant 1.$$

Так как $f(-t) = 1 - f(t)$, то $a_0 = 1/2$, $a_k = 0$ при $k = 2m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, при $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$

$$\psi(z) = C + \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + R_n(z),$$

где $R_n(z) = O(1/z^{2n+2})$.

Так как

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z),$$

то, интегрируя асимптотическое представление для $\psi(z)$, получим

$$\ln \Gamma(z) = D + (C - 1)z + \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + \overline{R}_n(z).$$

Здесь D — некоторая постоянная,

$$\overline{R}_n(z) = -\int_z^{\infty} R_n(\xi)\, d\xi.$$

В выражении для $\overline{R}_n(z)$ интегрирование производится по любому контуру, уходящему в бесконечность. Выбирая в качестве контура прямую $\xi = zt$ $(1 \leqslant t < \infty)$, легко убедиться в том, что $\overline{R}_n(z) = O(1/z^{2n+1})$.

Для определения постоянных C, D воспользуемся функциональными соотношениями (4), (6) и оценкой для $\ln \Gamma(z)$, являющейся следствием полученного выше асимптотического представления для этой функции:

$$\ln \Gamma(z) = D + (C - 1)z + (z - 1/2)\ln z + O(1/z).$$

Из соотношения

$$\ln \Gamma(z + 1) - \ln \Gamma(z) - \ln z = 0$$

следует, что

$$C - 1 + (z + 1/2) \ln (1 + 1/z) = O(1/z).$$

Так как

$$\ln (1 + 1/z) = 1/z + O(1/z^2),$$

то $C = 0$. Аналогичным образом из (6а) находим $D = (\ln 2\pi)/2$.

Подставляя значения постоянных C и D, получаем при $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$ следующие *асимптотические представления:*

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \tag{21}$$

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)\,z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right). \tag{22}$$

Для чисел Бернулли можно получить рекуррентное соотношение, если воспользоваться представлением

$$t = (e^t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{m+k} \frac{B_k}{m!k!}.$$

Положим здесь $m + k = n$ и просуммируем коэффициенты при t^n:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{(n-k)!k!}.$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях t в левой и правой частях этого равенства, приходим к рекуррентному соотношению, позволяющему последовательно вычислять величины B_k:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad n > 1, \quad B_0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Асимптотическое представление (22) при $n = 1$ дает

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z \left[1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right].$$

Полагая $z = n$, приходим к *формуле Стирлинга*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Эта формула с довольно хорошей точностью годится даже для небольших значений n. Например, для $n = 1$, 2 получаем вместо 1! и 2! соответственно 0,92 и 1,92.

5. Примеры. 1. Интегралы, выражающиеся через гамма-функцию:

$$\int_0^{\infty} \exp\{-\alpha t^{\beta}\}\, t^{\gamma-1} dt = \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p \beta}, \quad p = \frac{\gamma}{\beta}, \tag{23}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma > 0;$$

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1} dt = (b-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{24}$$

$$\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0.$$

Интеграл (23) при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ вычисляется с помощью замены $s = \alpha t^{\beta}$, а полученный результат обобщается затем на более широкую область значений α, β, γ с помощью принципа аналитического продолжения. Интеграл (24) сводится к бета-функции заменой $t = a + (b - a)s$.

2. Некоторые предельные соотношения:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right], \tag{25}$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\,z^{a}} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta, \tag{26}$$

$$\lim_{z\to -n}\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = (-1)^{n+1}n!. \tag{27}$$

Соотношение (25) получается в результате перехода к пределу при $n \to \infty$ в формуле

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \psi(n+1)$$

и использования представления (21) для $\psi(n+1)$. Соотношение (26) следует непосредственно из (22). Соотношение (27) вытекает из того факта, что главный член разложения $\Gamma(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = -n$ имеет вид $\frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$.

Б. Аналитические свойства и асимптотические представления интеграла Лапласа

Интегралами Лапласа называют интегралы вида

$$F(z) = \int_a^b e^{zs(t)} f(t)\,dt.$$

Для наших целей достаточно ограничиться случаем, когда $s(t) = -t$, $a = 0$, $b = +\infty$, т. е.

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении интеграла $F(z)$ и выясним поведение функции $F(z)$ при $|z| \to \infty$. Для изучения поведения $F(z)$ при $|z| \to \infty$ удобно получить так называемое *асимптотическое представление* этой функции, т. е. представление вида

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\varphi_k(z) + O(\varphi_n(z)),$$

где функции $\varphi_k(z)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\varphi_{k+1}(z)}{\varphi_k(z)} = 0.$$