замены $s = \alpha t^\beta$, а полученный результат обобщается затем на более широкую область значений α, β, γ с помощью принципа аналитического продолжения. Интеграл (24) сводится к бета-функции заменой $t = a + (b-a)s$.

2. Некоторые предельные соотношения:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right], \tag{25}$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\,z^a} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta, \tag{26}$$

$$\lim_{z\to -n}\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = (-1)^{n+1}n!. \tag{27}$$

Соотношение (25) получается в результате перехода к пределу при $n\to\infty$ в формуле

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \psi(n+1)$$

и использования представления (21) для $\psi(n+1)$. Соотношение (26) следует непосредственно из (22). Соотношение (27) вытекает из того факта, что главный член разложения $\Gamma(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = -n$ имеет вид $\dfrac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}$.

Б. Аналитические свойства и асимптотические представления интеграла Лапласа

Интегралами Лапласа называют интегралы вида

$$F(z) = \int_a^b e^{zs(t)} f(t)\,dt.$$

Для наших целей достаточно ограничиться случаем, когда $s(t) = -t$, $a = 0$, $b = +\infty$, т. е.

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении интеграла $F(z)$ и выясним поведение функции $F(z)$ при $|z|\to\infty$. Для изучения поведения $F(z)$ при $|z|\to\infty$ удобно получить так называемое *асимптотическое представление* этой функции, т. е. представление вида

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\varphi_k(z) + O(\varphi_n(z)),$$

где функции $\varphi_k(z)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\varphi_{k+1}(z)}{\varphi_k(z)} = 0.$$

Запись $\psi(z) = O(\varphi_n(z))$ означает, что $|\psi(z)| \leqslant c|\varphi_n(z)|$ (c — постоянная).

Особенно часто для изучения поведения функций при $|z| \to \infty$ в качестве $\varphi_k(z)$ используются функции $\varphi_k(z) = 1/z^{\mu_k}$, где μ_k — некоторые постоянные.

1. Асимптотическое представление интеграла (1) можно получить с помощью следующей леммы.

Лемма Ватсона. *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям:*

1) *интеграл* $\int\limits_0^c |f(t)|\,dt$ *существует при любом* $c > 0$, *т. е. функция $f(t)$ локально абсолютно интегрируема на интервале* $(0, \infty)$;

2) *при $t \to 0$ функцию $f(t)$ можно представить в виде*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + O\left(t^{\lambda_n}\right),$$

где $-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \ldots < \operatorname{Re}\lambda_n$;

3) $f(t) = O(e^{\nu t})$ *при* $t \to +\infty$, *где* $\nu > 0$ — *некоторая постоянная.*

Тогда функция $F(z)$, определяемая интегралом (1), *при* $z \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$ *имеет следующее асимптотическое представление:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Положим

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{\lambda_k} + r_n(t).$$

Тогда

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int\limits_0^\infty e^{-zt} t^{\lambda_k} dt + R_n(z),$$

где

$$R_n(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt} r_n(t)\,dt.$$

Так как (см. Дополнение А, п. 5)

$$\int\limits_0^\infty e^{-zt} t^{\lambda_k} dt = \frac{\Gamma(\lambda_k + 1)}{z^{\lambda_k+1}}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2},$$

то лемма будет доказана, если мы убедимся в том, что

$R_n(z) = O\left(1/z^{\lambda_n+1}\right)$ при $z \to \infty$. Имеем

$$R_n(z) = \int_0^\delta e^{-zt} r_n(t)\,dt + \int_\delta^\infty e^{-zt} r_n(t)\,dt = R_n^{(1)}(z) + R_n^{(2)}(z).$$

Из условий леммы вытекает, что $r_n(t) = O\left(t^{\lambda_n}\right)$ при $t \to 0$. Поэтому существуют такие положительные постоянные M, δ, что при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ имеет место неравенство $|r_n(t)| \leqslant M t^{\operatorname{Re}\lambda_n}$. При таком выборе постоянной δ и $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$|R_n^{(1)}(z)| \leqslant \int_0^\delta |e^{-zt} r_n(t)|\,dt \leqslant M \int_0^\delta e^{-t \operatorname{Re} z} t^{\operatorname{Re}\lambda_n} dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^\infty e^{-t \operatorname{Re} z} t^{\operatorname{Re}\lambda_n} dt = M \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\lambda_n + 1)}{(\operatorname{Re} z)^{\operatorname{Re}\lambda_n + 1}}.$$

Если $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, то $\operatorname{Re} z \geqslant |z| \sin\varepsilon$ и, следовательно,

$$R_n^{(1)}(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{\operatorname{Re}\lambda_n + 1}}\right) = O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right).$$

Для оценки $R_n^{(2)}(z)$ положим $t = \delta + \tau$:

$$R_n^{(2)}(z) = \int_\delta^\infty e^{-zt} r_n(t)\,dt = e^{-\delta z} \int_0^\infty e^{-z\tau} r_n(\tau + \delta)\,d\tau.$$

Интеграл $\int_0^\infty e^{-z\tau} r_n(\tau + \delta)\,d\tau$ равномерно ограничен при $|\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $\operatorname{Re} z \geqslant \nu + \varepsilon$. Действительно, при таких значениях z

$$\left|\int_0^\infty e^{-z\tau} r_n(\tau + \delta)\,d\tau\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-(\nu+\varepsilon)\tau} |r_n(\tau + \delta)|\,d\tau.$$

Интеграл, стоящий в правой части полученного неравенства, сходится, так как в силу леммы функция $r_n(t)$ локально абсолютно интегрируема и $r_n(t) = O(e^{\nu t})$ при $t \to +\infty$. Поэтому

$$R_n^{(2)}(z) = O\left(e^{-\delta z}\right), \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon.$$

Учитывая, что $O(e^{-\delta z}) = O(z^{-s})$ при $z \to \infty$ для произвольного положительного s, получаем требуемую оценку для остатка:

$$R_n(z) = R_n^{(1)}(z) + R_n^{(2)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right), \quad z \to \infty, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Замечание. Лемма Ватсона имеет место и для интеграла вида

$$F(z) = \int_0^a e^{-zt} f(t)\,dt, \quad a > 0.$$

При этом условие 3) можно опустить.

2. Аналитическое продолжение интеграла Лапласа (1) и асимптотическое представление для аналитического продолжения в интересующих нас случаях можно получить с помощью следующей теоремы.

Теорема. *Пусть функция* $f(t)$ *является аналитической в секторе* $|t|>0$, $-\theta_2<\arg t<\theta_1$ $(\theta_1>0,\ \theta_2>0)$. *Пусть в этом секторе при* $t\to 0$ *функцию* $f(t)$ *можно представить в виде*

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k t^{\lambda_k}+O\left(t^{\lambda_n}\right),$$

где $-1<\operatorname{Re}\lambda_0<\operatorname{Re}\lambda_1<\ldots<\operatorname{Re}\lambda_n$, *а при* $t\to\infty$ *в виде* $f(t)=O(t^{\beta})$, *где* β — *некоторая постоянная. Тогда функция* $F(z)$, *определяемая интегралом* (1) *при* $z>0$, *может быть аналитически продолжена в секторе* $|z|>0$, $-\pi/2-\theta_1<\arg z<\pi/2+\theta_2$. *Функция* $F(z)$ *при* $-\pi/2-\theta_1+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\pi/2+\theta_2-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ *имеет следующее асимптотическое представление*:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\frac{\Gamma(\lambda_k+1)}{z^{\lambda_k+1}}+O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n}}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Исследуем область аналитичности интеграла (1). Пусть $z=re^{i\varphi}$. По теореме об аналитичности интеграла, зависящего от параметра (см. теорему 2 из § 3), функция $F(z)$ будет аналитической в секторе $|z|>0$, $|\varphi|<\pi/2$, так как интеграл $F(z)$ равномерно сходится по z в области $|\varphi|\leqslant\pi/2-\varepsilon$, $|z|\geqslant\delta>0$. Действительно, в этой области

$$|e^{-zt}|=\exp\{-tr\cos\varphi\}\leqslant\exp\{-t\delta\sin\varepsilon\},$$

и интеграл $\int\limits_0^\infty\exp\{-t\delta\sin\varepsilon\}\,|f(t)|\,dt$ сходится в силу условий теоремы.

Для аналитического продолжения функции $F(z)$ в более широкую область удобно перейти в (1) от интегрирования по положительным значениям t к интегрированию по лучу $t=\rho e^{i\theta}$ $(\theta=\mathrm{const},\ \rho>0)$ и рассмотреть в связи с этим функцию

$$F_\theta(z)=\int\limits_0^{\infty e^{i\theta}}e^{-zt}f(t)\,dt=\int\limits_0^\infty\exp\left\{-\left(ze^{i\theta}\right)\rho\right\}f\left(\rho e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\rho, \tag{4}$$
$$-\theta_2<\theta<\theta_1.$$

Исследование области аналитичности интеграла $F_\theta(z)$, аналогичное исследованию интеграла $F(z)$, показывает, что функция $F_\theta(z)$ будет аналитична в области $|\arg(ze^{i\theta})|=|\varphi+\theta|<\pi/2$. Докажем, что $F_\theta(z)$ при $|\theta|<\pi$ является аналитическим продолжением функции $F(z)$. Для доказательства достаточно убедиться в их равенстве на некотором луче $\varphi=\varphi_0$, принадлежащем области аналитичности обеих функций, например при $\varphi_0=-\theta/2$.

Воспользуемся теоремой Коши, вычисляя интеграл $\int\limits_C e^{-zt}f(t)\,dt$ по замкнутому контуру, изображенному на рис. 16:

$$\int\limits_C e^{-zt}f(t)\,dt=0.$$

На дуге радиуса R при $t=Re^{i\psi}$, $\psi\in[0,\ \theta]$ и $z=re^{-i\theta/2}$ имеем

$$f(t)=O(R^{\beta}),\quad |e^{-zt}|=\exp\{-rR\cos(\psi-\theta/2)\}.$$

Так как $|\psi-\theta/2|\leqslant|\theta/2|<\pi/2$, то $\cos(\psi-\theta/2)\geqslant\cos(\theta/2)>0$. В силу полученных оценок интеграл по дуге радиуса R стремится к нулю при $R\to\infty$, т. е. при $\varphi=-\theta/2$ имеем $F(z)=F_\theta(z)$. Если в секторе $-\theta_2<\theta<\theta_1$ возможны значения $|\theta|\geqslant\pi$, то аналогичным образом можно доказать, что $F_{\tilde\theta}(z)$ будет аналитическим продолжением функции $F_\theta(z)$, если $|\tilde\theta-\theta|<\pi$.

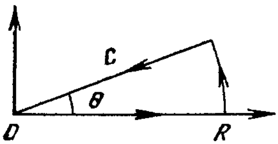

Рис. 16.

Таким образом, совокупность функций $F_\theta(z)$ при всех возможных значениях θ дает аналитическое продолжение функции $F(z)$ на область, являющуюся объединением секторов $|\varphi+\theta|<\pi/2$, $-\theta_2<\theta<\theta_1$, т. е. на сектор $-\pi/2-\theta_1<\varphi<\pi/2+\theta_2$. Первая часть теоремы доказана.

Для получения асимптотического представления функции $F_\theta(z)$ в секторе $|\varphi+\theta|\leqslant\pi/2-\varepsilon$ достаточно воспользоваться леммой Ватсона и формулой (4) для $F_\theta(z)$. Так как в силу условий теоремы $f(\rho e^{i\theta})=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k(\rho e^{i\theta})^{\lambda_k}+O(\rho^{\lambda_n})$ при $\rho\to0$ и $f(\rho e^{i\theta})=O(\rho^{\beta})$ при $\rho\to+\infty$, то по лемме Ватсона

$$F_\theta(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(e^{i\theta})^{\lambda_k}e^{i\theta}\Gamma(\lambda_k+1)}{(ze^{i\theta})^{\lambda_k+1}}+O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\frac{\Gamma(\lambda_k+1)}{z^{\lambda_k+1}}+O\left(\frac{1}{z^{\lambda_n+1}}\right).$$

З а м е ч а н и я. 1. Если в окрестности точки $t=0$ функция $f(t)$ представима в виде $f(t)=t^{\lambda}g(t)$, где $g(t)$ — аналитическая функция, $\operatorname{Re}\lambda>-1$, то в условиях теоремы следует положить $\lambda_k=\lambda+k$; постоянные a_k являются коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции $g(t)$: $g(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kt^k$.

2. Если в условиях теоремы $f(t)$ зависит от параметров, является аналитической функцией каждого из параметров и непрерывна по совокупности переменных в области D изменения параметров при $|t|>0$, $-\theta_2<\arg t<\theta_1$, то аналитическое продолжение по переменной z функции $F(z)$ при $z\neq0$ будет также ана-

литической функцией каждого из параметров в той части области D, где интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho}\,|f(\rho e^{i\theta})|\,d\rho$$

равномерно сходится относительно параметров при любом фиксированном значении $\mu > 0$. Действительно, в этом случае интеграл $F_\theta(z)$, дающий аналитическое продолжение функции $F(z)$, равномерно сходится при $|\varphi + \theta| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $|z| \geqslant \delta$, так как в этой области

$$|F_\theta(z)| \leqslant \int_0^\infty e^{-\mu\rho}\,|f(\rho e^{i\theta})|\,d\rho, \quad \mu = \delta \sin\varepsilon.$$

Пример. Найдем область, на которую функция

$$F(z, p, q) = \int_0^\infty e^{-zt} t^p (1 + at)^q dt,$$

$$z > 0, \quad |\arg a| < \pi, \quad |\arg(1 + at)| < \pi, \quad \operatorname{Re} p > -1,$$

может быть аналитически продолжена по каждой из переменных и получим асимптотическое разложение этой функции при $z \to \infty$.

В данном случае $f(t) = t^p(1 + at)^q$, функция $g(t) = (1 + at)^q$ имеет особенность (точку ветвления) при $at = -1$. Эта функция будет аналитической в секторе $|\arg(at)| < \pi$, т. е. при $-\pi - \arg a < \arg t < \pi - \arg a$. Поэтому в условиях теоремы следует положить $\theta_1 = \pi - \arg a$, $\theta_2 = \pi + \arg a$, $\lambda_k = p + k$, $\beta = p + q$.

Для того чтобы найти область, на которую функция $F(z, p, q)$ может быть аналитически продолжена по каждой из переменных, найдем область, где интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho}\,|f(\rho e^{i\theta})|\,d\rho = \int_0^\infty e^{-\mu\rho}\,|(\rho e^{i\theta})^p (1 + ae^{i\theta}\rho)^q|\,d\rho,$$

$$|\arg(ae^{i\theta})| < \pi,$$

будет равномерно сходиться относительно переменных p, q при любом фиксированном значении $\mu > 0$ (см. замечание 2). Это будет иметь место, если $\operatorname{Re} p \geqslant \delta - 1$, $|p| \leqslant N$, $|q| \leqslant N$. Действительно, при $t = \rho e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$ функция $|f(t)/t^{\delta-1}|$ будет ограничена, так как она непрерывна в замкнутой области по совокупности переменных, т. е. $|f(t)| \leqslant c_1\rho^{\delta-1}$ $(0 < \rho \leqslant 1)$. При $\rho \geqslant 1$ можно провести аналогичные рассуждения, заменив переменную ρ на $s = 1/\rho$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$. В результате получим, что при $\rho \geqslant 1$ функция $|f(t)/t^{2N}|$ будет ограничена, т. е. $|f(t)| \leqslant c_2\rho^{2N}$. Постоянные c_1 и c_2, как это видно из рассуждений, не зависят от параметров p и q. Так как интегралы

$$\int_0^1 e^{-\mu\rho}\rho^{\delta-1}d\rho, \quad \int_1^\infty e^{-\mu\rho}\rho^{2N}d\rho$$

сходятся, то интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\mu\rho}\left|f(\rho e^{i\theta})\right|d\rho$$

сходится равномерно в рассматриваемой области. Поэтому функция $F(z, p, q)$ может быть аналитически продолжена по каждой из переменных в области

$$\operatorname{Re} p \geqslant -1+\delta, \quad |p| \leqslant N, \quad |q| \leqslant N, \quad z \neq 0,$$
$$-3\pi/2 + \arg a < \arg z < 3\pi/2 + \arg a.$$

Ввиду произвольности постоянных δ, N указанную область изменения переменных можно заменить на область

$$\operatorname{Re} p > -1, \quad z \neq 0, \quad -3\pi/2 + \arg a < \arg z < 3\pi/2 + \arg a.$$

При $|\arg z| < \pi/2$ аналитическое продолжение функции $F(z, p, q)$ можно получить с помощью исходного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-zt}t^p(1+at)^q dt, \quad \operatorname{Re} p > -1.$$

По теореме функция $F(z, p, q)$ в секторе $3\pi/2 + \arg a + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant 3\pi/2 + \arg a - \varepsilon$ имеет следующее асимптотическое представление при $z \to \infty$:

$$F(z, p, q) = \frac{\Gamma(q+1)}{z^{p+1}}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(p+k+1)}{k!\,\Gamma(q+1-k)}\left(\frac{a}{z}\right)^k + O\left(\frac{1}{z^n}\right)\right].$$