ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Гамма-функция $\Gamma(z)$.

Определение:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad \operatorname{Re} z>0.$$

Аналитическое продолжение. Функция $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z=-n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), в которых $\Gamma(z)$ имеет полюсы первого порядка с вычетами

$$\operatorname{Res}\Gamma(z)=(-1)^n/n!.$$

Интегралы, связанные с гамма-функцией:

$$B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \operatorname{Re} x>0, \quad \operatorname{Re} y>0;$$

$$\int_0^\infty \exp\{-\alpha t^\beta\}\, t^{\gamma-1}dt=\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p\beta}, \quad p=\frac{\gamma}{\beta}, \operatorname{Re}\alpha>0, \quad \operatorname{Re}\beta>0, \quad \operatorname{Re}\gamma>0.$$

Функциональные соотношения:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

Частные значения:

$$\Gamma(n+1)=n!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

Асимптотическое представление и его следствия:

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right), \quad |\arg z|\leqslant\pi-\delta,$$

B_k — числа Бернулли, которые можно определить из рекуррентного соотношения

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kB_k=0, \; n>1, \; B_0=1, \; C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left[1+\frac{1}{12x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right],\quad x>0,$$

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{(формула Стирлинга)},$$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)}=z^a\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right],\quad |\arg z|\leqslant\pi-\delta.$$

График функции $y=\Gamma(x)$ приведен в Дополнении А.

2. Логарифмическая производная гамма-функции $\psi(z)$.

Определение:

$$\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

Функциональные соотношения:

$$\psi(z+1)=1/z+\psi(z),\quad \psi(z)=\psi(1-z)-\pi\operatorname{ctg}\pi z,$$
$$2\ln 2+\psi(z)+\psi(z+1/2)=2\psi(2z).$$

Частные значения:

$$\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma,\quad \gamma=0{,}57721566\ldots,\quad \psi(1/2)=-\gamma-2\ln 2,$$

$$\psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad \psi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}.$$

Интегральные представления и разложение в ряд:

$$\psi(z)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt=-\gamma+\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt,\quad \operatorname{Re} z>0,$$

$$\psi(z)=-\gamma+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(z+n)},\quad z\neq-n,\quad n=0,1\ldots .$$

Асимптотическое представление:

$$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}+O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right),$$

$|\arg z|\leqslant\pi-\delta$, B_k — числа Бернулли (см. п. 1).

3. Обобщенное уравнение гипергеометрического типа.

Дифференциальное уравнение:

$$u''+\frac{\tilde\tau(z)}{\sigma(z)}u'+\frac{\tilde\sigma(z)}{\sigma^2(z)}u=0,$$

$\sigma(z)$, $\tilde\sigma(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde\tau(z)$ — полином не выше первой степени.

Приведение обобщенного уравнения гипергеометрического типа к уравнению гипергеометрического типа. Заменой $u=\varphi(z)y$ исходное дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\sigma(z)y''+\tau(z)y'+\lambda y=0,$$

где $\tau(z)$ — полином не выше первой степени, λ — постоянная. Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'/\varphi=\pi(z)/\sigma(z),$$

где $\pi(z)$ — полином не выше первой степени:

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}.$$

Постоянная k выбирается из условия равенства нулю дискриминанта квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня. Полином $\tau(z)$ и постоянная λ определяются из равенства

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \quad \lambda = k + \pi'(z).$$

Исключения. 1) Если полином $\sigma(z)$ имеет кратный корень, т. е. $\sigma(z) = (z - a)^2$, то исходное уравнение после замены $s = 1/(z - a)$ приводится к обобщенному уравнению гипергеометрического типа, для которого $\sigma(s) = s$.

2) Приведение исходного уравнения к уравнению гипергеометрического типа указанным выше способом невозможно, если $\sigma(z) = 1$, а $(\tilde{\tau}(z)/2)^2 - \tilde{\sigma}(z)$ — полином первой степени. В этом случае, если положить $\pi(z) = -\tilde{\tau}(z)/2$, исходное уравнение приводится к виду $y'' + (az + b)y = 0$. Это уравнение линейной заменой $s = az + b$ сводится к уравнению Ломмеля (14.4).

4. Уравнение гипергеометрического типа.

Дифференциальное уравнение:

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

$\sigma(z)$, $\tau(z)$ — полиномы не выше второй и первой степени соответственно, λ — постоянная. Решения этого уравнения называются *функциями гипергеометрического типа.*

Самосопряженный вид:

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0,$$

где функция $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z).$$

Линейной заменой независимой переменной уравнения гипергеометрического типа можно, как правило, привести к следующим *каноническим видам.*

1) *Гипергеометрическое уравнение*:

$$z(1 - z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0.$$

2) *Вырожденное гипергеометрическое уравнение*:

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0.$$

3) *Уравнение Эрмита*:

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

Свойство производных функций гипергеометрического типа $y(z)$. Производные $v_n(z) = y^{(n)}(z)$ являются функциями гипергеометрического типа и удовлетворяют уравнению

$$\sigma(z)v_n'' + \tau_n(z)v_n' + \mu_n v_n = 0,$$

$$\tau_n(z) = \tau(z) + n\sigma'(z), \quad \mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Самосопряженный вид уравнения для $v_n(z)$:

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \mu_n\rho_n v_n = 0, \quad \rho_n(z) = \sigma^n(z)\rho(z).$$

Интегральные представления для частных решений $y_\nu(z)$:

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\, ds.$$

Здесь C_ν — нормировочная постоянная, функция $\rho(z)$ удовлетворяет уравнению $[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z)$, постоянная ν — корень уравнения $\lambda + \nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma'' = 0$, контур C выбирается из условия $\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = 0$ (s_1, s_2 — концы контура). О различных возможностях выбора контуров C см. § 3.

Интегральные представления для производных частных решений $y_\nu(z)$:

$$y_\nu^{(k)}(z) = \frac{C_\nu^{(k)}}{\sigma^k(z)\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1-k}}\, ds, \quad C_\nu^{(k)} = C_\nu \prod_{s=0}^{k-1}\left(\tau' + \frac{\nu+s-1}{2}\sigma''\right).$$

Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования для частных решений $y_\nu(z)$. Между любыми тремя функциями $y_{\nu_i}^{(k_i)}(z)$ существует линейное соотношение

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(z)\, y_{\nu_i}^{(k_i)}(z) = 0$$

с полиномиальными коэффициентами $A_i(z)$, если $\nu_i - \nu_j$ — целые числа. О способе вычисления коэффициентов $A_i(z)$ см. § 4 и § 21, п. 4.

5. Полиномы гипергеометрического типа. Полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$ — полиномиальные решения уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0,$$

соответствующие

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Формула Родрига для полиномов гипергеометрического типа:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n}[\sigma^n(z)\rho(z)]$$

(B_n — нормировочная постоянная).

Формула Родрига для производных от полиномов гипергеометрического типа $y_n(z)$:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\sigma^m(z)\rho(z)} \cdot \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}[\sigma^n(z)\rho(z)],$$

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right), \quad A_{0n} = 1.$$

Линейной заменой независимой переменной выражения для полиномов $y_n(z)$, функций $\sigma(z)$ и $\rho(z)$ можно привести к следующим *каноническим видам*.

1) *Полиномы Якоби*:

$$y_n(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}],$$

$$\sigma(z) = 1 - z^2, \quad \rho(z) = (1-z)^\alpha(1+z)^\beta.$$

Важными частными случаями полиномов Якоби являются:

а) *полиномы Лежандра*: $P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$;

б) *полиномы Чебышева первого и второго рода*:

$$T_n(z) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(z) = \cos(n \arccos z),$$

$$U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2,1/2)}(z) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}, \quad \varphi = \arccos z.$$

в) *полиномы Гегенбауэра*:

$$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(z).$$

Мы использовали обозначение $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$.

2) *Полиномы Лагерра*:

$$y_n(z) = L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{n+\alpha} e^{-z}\right), \ \sigma(z) = z, \ \rho(z) = z^\alpha e^{-z}.$$

3) *Полиномы Эрмита*:

$$y_n(z) = H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right), \ \sigma(z) = 1, \ \rho(z) = e^{-z^2}.$$

Формулы дифференцирования для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита:

$$\frac{d}{dz} P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z),$$

$$\frac{d}{dz} L_n^\alpha(z) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(z), \quad \frac{d}{dz} H_n(z) = 2nH_{n-1}(z).$$

Если полином $\sigma(z)$ имеет кратные корни, т. е. $\sigma(z) = (z-a)^2$, то соответствующие полиномы $y_n(z)$ можно выразить через полиномы Лагерра:

$$y_n(z) = C_n (z-a)^n L_n^\alpha\left(\frac{\tau(a)}{z-a}\right), \qquad \alpha = -\tau' - 2n + 1$$

(C_n — нормировочная постоянная).

6. **Некоторые общие свойства ортогональных полиномов.** Полиномы $p_n(x)$ ортогональны на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, если

$$\int_a^b p_m(x) p_n(x) \rho(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Явное выражение для полинома $p_n(x)$, ортогонального с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b):

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \ldots & C_n \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1} & C_n & \ldots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix},$$

$C_n = \int_a^b x^n \rho(x)\, dx$ — момент весовой функции, A_n — нормировочная постоянная.

Рекуррентное соотношение:

$$xp_n(x)=\frac{a_n}{a_{n+1}}p_{n+1}(x)+\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)p_n(x)+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}p_{n-1}(x).$$

Здесь

$$d_n^2=\int_a^b p_n^2(x)\,\rho(x)\,dx$$

есть квадрат нормы; a_n, b_n — коэффициенты при старших степенях полинома

$$p_n(x)=a_nx^n+b_nx^{n-1}+\ldots,\quad a_n\neq 0.$$

Формула Дарбу — Кристоффеля:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k(x)\,p_k(y)}{d_k^2}=\frac{1}{d_n^2}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{p_{n+1}(x)\,p_n(y)-p_n(x)\,p_{n+1}(y)}{x-y}.$$

7. Классические ортогональные полиномы. *Классическими ортогональными полиномами* называются полиномы гипергеометрического типа $y_n(x)$, для которых функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a,\,b}=0$$

(a, b — некоторые вещественные числа; $k=0,1,\ldots$), причем $\rho(x)>0$ на интервале (a,b). Эти полиномы ортогональны с весом $\rho(x)$ на интервале (a,b), т. е.

$$\int_a^b y_m(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx=0,\qquad m\neq n.$$

Классические ортогональные полиномы линейной заменой переменной приводятся к следующим *каноническим видам*:

1) *полиномы Якоби* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ при $\alpha>-1$, $\beta>-1$;

2) *полиномы Лагерра* $L_n^{\alpha}(x)$ при $\alpha>-1$;

3) *полиномы Эрмита* $H_n(x)$.

Основные характеристики этих полиномов содержатся в табл. 1, 2 (см. §§ 5, 6).

Асимптотические представления при $n\to\infty$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\frac{\cos\{[n+(\alpha+\beta+1)/2]\,\theta-(2\alpha+1)\,\pi/4\}}{\sqrt{\pi n}\,(\sin(\theta/2))^{\alpha+1/2}\,(\cos(\theta/2))^{\beta+1/2}}+O(n^{-3/2}),$$

$$0<\delta\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta,$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{x/2}x^{-\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}\cos\left[2\sqrt{nx}-(2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right]+O(n^{\alpha/2-3/4}),$$

$$0<\delta\leqslant x\leqslant N<\infty,$$

$$H_n(x)=\sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2}e^{x^2/2}\left[\cos\left(\sqrt{2n}\,x-\frac{\pi n}{2}\right)+O(n^{-1/4})\right],$$

$$|x|\leqslant N<\infty.$$

Производящие функции:

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left\{-\frac{xt}{1-t}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)\,t^n,\qquad \exp\{2xt-t^2\}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Полиномы Лежандра. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ ортогональны с весом $\rho(x) = 1$ на интервале $(-1, 1)$. Они являются частным случаем полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ при $\alpha = \beta = 0$ и полиномов Гегенбауэра $C_n^{\nu}(x)$ при $\nu = 1/2$.

Дифференциальное уравнение:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y = P_n(x).$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^n.$$

Интегральное представление:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1 - x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi.$$

Производящая функция:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n.$$

Частные значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0,$$

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Квадрат нормы:

$$d_n^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентные соотношения:

$$(1 - x^2)P_n'(x) = -(n+1)\left[P_{n+1}(x) - xP_n(x)\right],$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n+1}\left[P_{n+1}'(x) - xP_n'(x)\right] = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\right],$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Асимптотическое представление:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,\frac{\cos\left[(n + 1/2)\theta - \pi/4\right]}{\sqrt{\sin\theta}} + O(n^{-3/2}).$$

Графики полиномов Лежандра $P_n(x)$ для некоторых значений n приведены на рис. 1 (см. § 7).

8. **Сферические функции:**

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + l(l+1)u = 0.$$

Явные выражения:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\cos\theta), \qquad -l \leqslant m \leqslant l,$$

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (1-x^2)^l =$$

$$= \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (1-x^2)^l,$$

$$\Theta_{l,-m}(x) = (-1)^m \Theta_{lm}(x), \quad Y^*_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi).$$

Свойство ортогональности:

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi)\, d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$\cos\theta\, Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi).$$

Формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = im Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} + m \operatorname{ctg}\theta\, Y_{lm}\right) = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, Y_{l,m\pm1}$$

(при $m = \pm(l+1)$ следует полагать $Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$).

Разложение произвольного однородного полинома степени l по сферическим функциям:

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m,n} C_{mn} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi).$$

Разложение произвольного однородного гармонического полинома степени l по сферическим функциям:

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Теорема сложения:

$$P_l(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y^*_{lm}(\theta_2, \varphi_2)$$

(ω — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, направления которых характеризуются углами θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2),

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\omega) =$$

$$= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2l+1} \cdot \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y^*_{lm}(\theta_2, \varphi_2)\right],$$

$$r_< = \min(r_1, r_2), \quad r_> = \max(r_1, r_2).$$

Обобщенные сферические функции. При вращении системы координат, определяемом углами Эйлера α, β, γ, сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ преобразуются следующим образом:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^{l} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Коэффициенты $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ называются *обобщенными сферическими функциями* порядка l.

Явное выражение для функций $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\{i(m\alpha + m'\gamma)\} d^l_{mm'}(\beta),$$

$$d^l_{mm'}(\beta) = \frac{1}{2^m}\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}} \times$$

$$\times (1-x)^{(m-m')/2}(1+x)^{(m+m')/2} P^{(m-m', m+m')}_{l-m}(x),$$

$P^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ — полином Якоби, $x = \cos\beta$.

Связь обобщенных сферических функций со сферическими функциями:

$$D^l_{m0}(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta, \alpha),$$

$$D^l_{0m}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\beta, \gamma),$$

$$D^l_{00}(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos\beta).$$

9. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. *Классическими ортогональными полиномами дискретной переменной* называются полиномы $y_n(x)$, удовлетворяющие разностному уравнению

$$\sigma(x)\Delta\nabla y + \tau(x)\Delta y + \lambda y = 0,$$

для которых функция $\rho(x)$, являющаяся решением разностного уравнения

$$\Delta[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x),$$

удовлетворяет условию

$$\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a,\,b} = 0$$

(a, b — некоторые вещественные числа; если $b \neq \infty$, то $b - a$ — целое число; $k = 0, 1, \ldots$), причем $\rho(x) > 0$ на интервале (a, b). Здесь

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \qquad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Эти полиномы ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ в следующем смысле:

$$\sum_i y_m(x_i)\, y_n(x_i)\, \rho(x_i) = 0, \qquad m \neq n.$$

Суммирование производится по значениям i, для которых $a \leqslant x_i \leqslant b-1$.

Формула Родрига:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \Delta^n \left[\rho(x) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(x-k)\right].$$

Для классических ортогональных полиномов дискретной переменной остаются справедливыми все свойства полиномов $p_n(x)$, ортогональных на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, если в соответствующих формулах интегрирование на интервале (a, b) заменить суммированием по дискретным значениям независимой переменной.

Основные характеристики классических ортогональных полиномов дискретной переменной — полиномов Хана $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, Чебышева $t_n(x)$, Мейкснера $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$, Кравчука $k_n^{(p)}(x)$, Шарлье $c_n^{(\mu)}(x)$ — содержатся в табл. 3а — 3в (см. § 12).

10. Некоторые специальные функции, родственные функциям второго рода $Q_0(z)$ для классических ортогональных полиномов.

а) *Неполная гамма-функция*:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt.$$

После замены t на $x(1+s)$ интеграл для $\Gamma(a, x)$ приводится к интегральному представлению для вырожденной гипергеометрической функции второго рода $G(\alpha, \gamma, x)$:

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^a G(1, 1+a, x).$$

Неполная бета-функция:

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

После замены t на xs интеграл для $B_x(p, q)$ приводится к интегральному представлению для гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$:

$$B_x(p, q) = \frac{1}{p} x^p F(p, 1-q, 1+p, x).$$

б) *Интегральная экспонента*:

$$E_m(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zs}}{s^m} ds, \qquad \operatorname{Re} z > 0, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Рекуррентное соотношение и формула дифференцирования:

$$E_m(z) = \frac{1}{m-1}\left[e^{-z} - zE_{m-1}(z)\right], \quad E'_m(z) = -E_{m-1}(z).$$

Разложение в ряд функции $E_1(z)$:

$$E_1(z) = -\gamma - \ln z + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{z^k}{k!}$$

(γ — постоянная Эйлера). Асимптотическое представление:

$$E_m(z) = \frac{e^{-z}}{z}\left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (m)_k}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)\right],$$

$$(m)_k = m(m+1)\ldots(m+k-1), \quad (m)_0 = 1.$$

Связь функции $E_1(z)$ с интегральной показательной функцией $\operatorname{Ei}(z)$:

$$E_1(z) = -\operatorname{Ei}(-z).$$

в) *Интегральные синус и косинус*:

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin s}{s} ds, \quad \operatorname{Ci}(z) = \int_\infty^z \frac{\cos s}{s} ds.$$

Разложения в степенные ряды:

$$\mathrm{Si}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!},$$

$$\mathrm{Ci}(z)=\gamma+\ln z-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{(2k)(2k)!}$$

(γ — постоянная Эйлера). Асимптотические представления:

$$\mathrm{Si}(z)=\frac{\pi}{2}-\frac{\cos z}{z}P(z)-\frac{\sin z}{z}Q(z),$$

$$\mathrm{Ci}(z)=\frac{\sin z}{z}P(z)-\frac{\cos z}{z}Q(z),$$

где

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{z^{2k}}+O\left(z^{-2n-2}\right),$$

$$Q(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{z^{2k+1}}+O\left(z^{-2n-3}\right).$$

г) *Интеграл вероятности:*

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-s^2}ds.$$

Разложение в степенной ряд:

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Асимптотическое представление:

$$\Phi(z)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{z}\left[1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2k-1)}{(2z^2)^k}+O\left(z^{-2n-2}\right)\right],$$

$$|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta.$$

д) *Интегралы Френеля:*

$$S(z)=\int_0^z \sin\frac{\pi s^2}{2}ds,\quad C(z)=\int_0^z\cos\frac{\pi s^2}{2}ds.$$

Связь с интегралом вероятности:

$$C(z)-iS(z)=\int_0^z\exp\left\{-i\frac{\pi t^2}{2}\right\}dt=\frac{1}{\sqrt{2i}}\Phi\left(\sqrt{i\frac{\pi}{2}}\,z\right).$$

Полученная связь позволяет получить асимптотическое поведение и разложение в ряды интегралов Френеля.

11. Цилиндрические функции.

а) Функции Бесселя.

Уравнение Бесселя:

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0,$$

$u = Z_\nu(z)$ — цилиндрическая функция порядка ν.

Уравнение Ломмеля:

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{z}v' + \left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{z^2}\right]v = 0, \quad v(z) = z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma).$$

Интегральные представления Пуассона для функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ и функций Ханкеля $H_\nu^{(1,2)}(z)$ при $\operatorname{Re}\nu > -1/2$:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos zt\,dt,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\exp\{i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{\exp\{-i(z - \pi\nu/2) - \pi/4)\}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt.$$

Интегральные представления Зоммерфельда:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\exp\{iz\sin\varphi - i\nu\varphi\}\,d\varphi,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_+}\exp\{iz\sin\varphi - i\nu\varphi\}\,d\varphi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_-}\exp\{iz\sin\varphi - i\nu\varphi\}\,d\varphi$$

(контуры C_1, C_+, C_- изображены на рис. 7, 8, см. § 16),

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{iz\sin\varphi - in\varphi\}\,d\varphi, \quad e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)\,e^{in\varphi}.$$

Асимптотические представления:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z + O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right],$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left\{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left\{-i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Связь между различными цилиндрическими функциями:

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{i\pi\nu}H_{\nu}^{(1)}(z),\quad H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-i\pi\nu}H_{\nu}^{(2)}(z),$$

$$J_{\nu}(z)=\frac{1}{2}\left[H_{\nu}^{(1)}(z)+H_{\nu}^{(2)}(z)\right],\quad Y_{\nu}(z)=\frac{1}{2i}\left[H_{\nu}^{(1)}(z)-H_{\nu}^{(2)}(z)\right],$$

$$H_{\nu}^{(1)}(z)=\frac{J_{-\nu}(z)-e^{-i\pi\nu}J_{\nu}(z)}{i\sin\pi\nu},\quad H_{\nu}^{(2)}(z)=\frac{e^{i\pi\nu}J_{\nu}(z)-J_{-\nu}(z)}{i\sin\pi\nu},$$

$$Y_{\nu}(z)=\frac{\cos\pi\nu J_{\nu}(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu},\quad J_{-n}(z)=(-1)^{n}J_{n}(z).$$

Разложения в ряды:

$$J_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)},$$

$$H_{n}^{(1,2)}(z)=J_{n}(z)\pm\frac{i}{\pi}\left\{2J_{n}(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\right\},$$

$$Y_{n}(z)=\frac{1}{\pi}\left\{2J_{n}(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\right\}$$

(при $n=0$ первую из сумм следует полагать равной нулю, $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции).

Графики функций $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ для некоторых значений n изображены на рис. 9, 10 (см. § 17).

Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования:

$$Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}Z_{\nu}(z),$$

$$Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)=2Z_{\nu}'(z),$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\left[z^{\nu}Z_{\nu}(z)\right]=z^{\nu-n}Z_{\nu-n}(z),$$

$$\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\left[z^{-\nu}Z_{\nu}(z)\right]=z^{-(\nu+n)}Z_{\nu+n}(z)$$

($Z_\nu(z)$ — любая из функций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$).

Функции Бесселя полуцелого порядка:

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\quad Y_{1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\pm i(z-\pi/2)},$$

$$J_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\right)^n \cos z, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$H^{(1,2)}_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$Y_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\right)^n \sin z, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Интеграл Фурье — Бесселя:

$$f(x) = \int_0^\infty kF(k)\, J_\nu(kx)\, dk, \quad F(k) = \int_0^\infty xf(x)\, J_\nu(kx)\, dx.$$

Теорема сложения Графа:

$$Z_\nu(kR)\, e^{i\nu\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)\, Z_{\nu+n}(k\rho)\, e^{in\theta}, \quad r < \rho.$$

Теорема сложения Гегенбауэра:

$$\frac{Z_\nu(kR)}{(kR)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu} \frac{Z_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu} C_n^\nu(\mu), \qquad r < \rho.$$

Здесь r, ρ, R — стороны произвольного треугольника, ψ — угол, лежащий между сторонами R и ρ, $\mu = \cos\theta$, θ — угол между сторонами r и ρ, k — произвольное число, $C_n^\nu(\mu)$ — полином Гененбауэра, $Z_\nu(z)$ — любая из функций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$, $r < \rho$.

Разложение сферической волны по полиномам Лежандра (см. теорему сложения Гегенбауэра):

$$\frac{e^{ikR}}{R} = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(k\rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\mu).$$

Разложение плоской волны по полиномам Лежандра:

$$e^{i\mathbf{kr}} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(n + \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(kr)\, P_n(\mu)$$

($\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mu = \cos\theta$, θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$).

б) Модифицированные функции Бесселя.

Дифференциальное уравнение:

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + \nu^2) u = 0, \quad u(z) = Z_\nu(iz).$$

Линейно независимыми решениями этого дифференциального уравнения при $z > 0$ являются функции

$$I_\nu(z) = \exp\left\{-i\,\frac{\pi\nu}{2}\right\} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \exp\left\{i\,\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_\nu^{(1)}(iz).$$

Интегральные представления Пуассона ($\mathrm{Re}\,\nu > -1/2$):

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^{1} (1 - s^2)^{\nu - 1/2} \operatorname{ch} zs\, ds,$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{\nu - 1/2} ds.$$

Интегральные представления Зоммерфельда для $K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-z\operatorname{ch}\psi+\nu\psi\}\,d\psi=\int_0^{\infty}\exp\{-z\operatorname{ch}\psi\}\operatorname{ch}\nu\psi\,d\psi,\quad \operatorname{Re} z>0,$$

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\infty}\exp\left\{-t-\frac{z^2}{4t}\right\}t^{-\nu-1}dt,\quad \operatorname{Re} z>0.$$

Асимптотическое поведение при $z\to+\infty$:

$$I_\nu(z)=\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right],\quad K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Связь между функциями $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ с различными значениями ν:

$$I_{-n}(z)=I_n(z),\quad K_{-\nu}(z)=K_\nu(z),\quad K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\pi\nu}.$$

Разложения в ряды:

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$K_n(z)=(-1)^{n+1}I_n(z)\ln\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}+$$

$$+\frac{1}{2}(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]$$

(при $n=0$ первую из сумм следует полагать равной нулю).

Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования:

$$I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}I_\nu(z),$$

$$I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)=2I'_\nu(z),\quad I'_0(z)=I_1(z).$$

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2K'_\nu(z),\quad K'_0(z)=-K_1(z).$$

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ полуцелого порядка:

$$I_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\right)^n\operatorname{ch} z,\quad n=0,1,\ldots,$$

$$K_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z},\quad n=0,1,\ldots$$

Графики функций $I_n(x)$ и $K_n(x)$ для некоторых значений n изображены на рис. 11, 12 (см. § 17).

12. Гипергеометрические функции $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$.

Дифференциальное уравнение:

$$z(1-z)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]y'-\alpha\beta y=0.$$

Частные решения:

а) $y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$,

$y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$,

$\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

б) $y_1 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z)$,

$y_2 = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z)$;

в) $y_1 = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1/z)$,

$y_2 = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1/z)$.

Интегральное представление:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma - a)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\gamma-\alpha-1} (1 - zt)^{-\beta} dt,$$

$$\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Разложение в ряд:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)} = a(a + 1) \ldots (a + n - 1).$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z).$$

Рекуррентные соотношения. Любые три гипергеометрические функции $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z)$ и $F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, z)$ в случае, когда разности $\alpha_i - \alpha_k$, $\beta_i - \beta_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ являются целыми числами, связаны между собой линейными соотношениями, коэффициенты которых яляются полиномами переменной z (о методе вывода рекуррентных соотношений см. § 20).

Функциональные соотношения:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{z}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{z}\right),$$

$$|\arg(-z)| < \pi.$$

Из последнего функционального соотношения и разложения гипергеометрических функций от аргумента $1/z$ в ряд вытекает *асимптотическое представление* для функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ при $z \to \infty$.

Комбинируя последние три функциональных соотношения, можно получить еще целый ряд других функциональных соотношений:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = (1-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta)}F\left(\alpha,\gamma-\beta,1+\alpha-\beta,\frac{1}{1-z}\right)+$$

$$+(1-z)^{-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}F\left(\gamma-\alpha,\beta,1-\alpha+\beta,\frac{1}{1-z}\right),$$

$$|\arg(-z)|<\pi,\quad |\arg(1-z)|<\pi,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) =$$

$$= z^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha+\beta-\gamma,\frac{z-1}{z}\right)+$$

$$+z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}F\left(\gamma-\alpha,1-\alpha,1+\gamma-\alpha-\beta,\frac{z-1}{z}\right),$$

$$|\arg z|<\pi,\quad |\arg(1-z)|<\pi,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}\right),\quad |\arg(1-z)|<\pi;$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-z)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}\right),\quad |\arg(1-z)|<\pi.$$

Выражение различных функций через гипергеометрическую функцию:

$$F(\alpha,0,\gamma,z)=1,\quad F(\alpha,\beta,\beta,z)=(1-z)^{-\alpha},$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\alpha+1,\frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1,\beta+1,\frac{1+z}{2}\right),$$

$$P_n(z)=F\left(-n,n+1,1,\frac{1-z}{2}\right)=(-1)^nF\left(-n,n+1,1,\frac{1+z}{2}\right),$$

$$K(z)=\int_0^{\pi/2}(1-z^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,z^2\right),$$

$$E(z)=\int_0^{\pi/2}(1-z^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,z^2\right).$$

13. Вырожденные гипергеометрические функции $F(\alpha,\gamma,z)$ и $G(\alpha,\gamma,z)$. *Дифференциальное уравнение:*

$$zy''+(\gamma-z)y'-\alpha y=0.$$

Частные решения:

а) $y_1=F(\alpha,\gamma,z)$, $y_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z)$;

б) $y_1=G(\alpha,\gamma,z)$, $y_2=e^zG(\gamma-\alpha,\gamma,-z)$.

Интегральные представления:

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}\,dt,\quad \operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0,$$

$$G(\alpha,\gamma,z)=\frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}dt,\quad \operatorname{Re}\alpha>0,$$

$$G(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-zs}s^{\alpha-1}(1+s)^{\gamma-\alpha-1}ds,\quad \operatorname{Re}z>0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0.$$

Разложение в ряд:

$$F(\alpha,\gamma,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

Формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1,\gamma+1,z),$$

$$\frac{d}{dz}G(\alpha,\gamma,z)=-\alpha G(\alpha+1,\gamma+1,z),$$

$$\frac{d}{dz}[z^{\alpha}G(\alpha,\gamma,z)]=-\frac{\gamma-\alpha-1}{z^2}[z^{\alpha}G(\alpha,\gamma-1,z)].$$

Рекуррентные соотношения. Любые три вырожденные гипергеометрические функции $F(\alpha_1,\gamma_1,z)$, $F(\alpha_2,\gamma_2,z)$ и $F(\alpha_3,\gamma_3,z)$ в случае, когда разности $\alpha_i-\alpha_k$, $\gamma_i-\gamma_k$ являются целыми числами, связаны между собой линейными соотношениями, коэффициенты которых являются полиномами относительно переменной z. Аналогичные утверждения имеют место и для функции $G(\alpha,\gamma,z)$ (о методе вывода рекуррентных соотношений см. § 20).

Функциональные соотношения:

$$F(\alpha,\gamma,z)=e^zF(\gamma-\alpha,\gamma,-z),\quad G(\alpha,\gamma,z)=z^{1-\gamma}G(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z),$$

$$G(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F(\alpha,\gamma,z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z),$$

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{\pm i\pi\alpha}G(\alpha,\gamma,z)+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{z\pm i\pi(\alpha-\gamma)}G(\gamma-\alpha,\gamma,-z)$$

(знак плюс соответствует $\operatorname{Im}z>0$).

Об особых случаях функциональных соотношений см. § 21, п. 3.

Асимптотические представления при $z\to\infty$:

$$G(\alpha,\gamma,z)=z^{-\alpha}[1+O(1/z)],$$

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^zz^{\alpha-\gamma}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$|\arg z|\leqslant\pi,\quad |\arg(-z)|\leqslant\pi.$$

Выражение различных функций через вырожденную гипергеометрическую функцию:

$$F(0,\gamma,z)=G(0,\gamma,z)=1,\quad F(\alpha,\alpha,z)=e^z,\quad G(\alpha,\alpha+1,z)=z^{-\alpha},$$

$$L_n^{\alpha}(z)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F(-n,1+\alpha,z),$$

$$I_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}e^{-z}F\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1,2z\right),$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\pi}(2z)^\nu e^{-z}G\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1,2z\right).$$

14. Функции Эрмита $H_\nu(z)$.

Дифференциальное уравнение:

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

Частные решения:

а) $y_1 = H_\nu(z), \quad y_2 = H_\nu(-z)$;

б) $y_1 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz), \quad y_2 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz)$.

Связь с вырожденными гипергеометричвскими функциями:

$$H_\nu(z) = 2^\nu G(-\nu/2, 1/2, z^2), \quad |\arg z| \leqslant \pi/2,$$

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} zF\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right).$$

Интегральное представление:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty \exp\{-t^2 - 2zt\} t^{-\nu-1} dt.$$

Разложение в ряд:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right) \frac{z^n}{n!}.$$

Формула дифференцирования:

$$H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z).$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_\nu(z) - 2zH_{\nu-1}(z) + 2(\nu-1)H_{\nu-2}(z) = 0.$$

Функциональные соотношения:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left[\exp\left\{i\frac{\pi\nu}{2}\right\} H_{-\nu-1}(iz) + \exp\left\{-i\frac{\pi\nu}{2}\right\} H_{-\nu-1}(-iz)\right],$$

$$H_\nu(z) = e^{i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{z^2 + i\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_{-\nu-1}(-iz),$$

$$H_\nu(z) = e^{-i\pi\nu} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \exp\left\{z^2 - i\frac{\pi(\nu+1)}{2}\right\} H_{-\nu-1}(iz).$$

Асимптотические представления при $z \to \infty$:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu [1 + O(1/z^2)], \qquad |\arg z| \leqslant \pi/2,$$

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] + \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} (-2z)^{-\nu-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right],$$

$$\pi/2 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi, \quad |\arg(-z)| < \pi/2.$$