ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение многих задач теоретической и математической физики, связанных, например, с изучением процессов теплопроводности и взаимодействия излучения с веществом, распространения электромагнитных и звуковых волн, с разработкой теории ядерных реакторов и внутреннего строения звезд, приводит к использованию различных специальных функций.

Так как на практике специальные функции обычно возникают как решения некоторых дифференциальных уравнений, то с точки зрения математической физики естественным является такой подход, при котором все свойства специальных функций выводились бы непосредственно из дифференциальных уравнений, возникающих при математической постановке задачи. В соответствии с этим авторами был разработан метод, позволяющий изложить теорию специальных функций, исходя из дифференциального уравнения вида

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0, \tag{1}$$

где $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени. Уравнение (1) содержит как частные случаи дифференциальные уравнения, приводящие к специальным функциям в математической физике и квантовой механике.

Книга построена по следующему плану. В гл. I рассмотрен класс преобразований $u = \varphi(z)y$, в результате которых с помощью специального выбора функции $\varphi(z)$ уравнение (1) преобразуется в уравнение того же типа. Среди таких преобразований выбираются преобразования, переводящие уравнение (1) в уравнение более простого вида

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0, \tag{2}$$

где $\tau(z)$ — полином не выше первой степени, λ — постоянная.

Будем называть уравнение (2) *уравнением гипергеометрического типа*, а его решения — *функциями гипергеометрического типа*. Теория этих функций строится в следующей последовательности. Сначала доказывается, что производные функций гипергеометрического типа также являются функциями гипергеометрического типа. Это свойство позволяет построить семейство частных решений уравнения (2), соответствующих определенным значениям λ, исходя из очевидного решения уравнения (2): $y(z)=\text{const}$ при $\lambda=0$. Такие решения являются полиномами относительно переменной z. Естественное обобщение интегрального представления для этих полиномов дает возможность вывести интегральное представление для произвольных функций гипергеометрического типа, соответствующих любым значениям λ. С помощью этого интегрального представления и преобразований уравнения (2) в уравнения того же вида могут быть получены все основные свойства рассматриваемых функций: разложения в степенные ряды, асимптотические представления, рекуррентные и функциональные соотношения. Развитая теория позволяет находить полную совокупность решений уравнения (1).

Таким образом, после изучения гл. I читатель получает достаточно полное представление о теории специальных функций.

Главы II—IV посвящены реализации намеченной программы для конкретных функций гипергеометрического типа — классических ортогональных полиномов, сферических, цилиндрических и гипергеометрических функций. Эти главы можно читать в произвольном порядке после изучения гл. I.

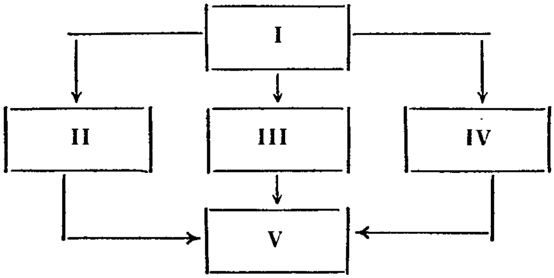
Теория классических ортогональных полиномов излагается в гл. II. Эти полиномы являются наиболее простыми специальными функциями. В то же время, опираясь на формулу Родрига для классических ортогональных полиномов, легко прийти к интегральным представлениям для других специальных функций математической физики, например для функций Бесселя (гл. III) и гипергеометрических функций (гл. IV).

Логическая схема построения теории классических ортогональных полиномов естественным образом переносится на случай, когда дифференциальное уравнение заменяется разностным. При таком обобщении возникают классические ортогональные полиномы дискретной переменной, теория которых рассмотрена в §§ 12, 13.

Глава V посвящена приложениям. Следует отметить, что в книге рассмотрены практически все основные задачи квантовой механики, допускающие решение в явной форме, и построение этих решений проведено единым методом. Для физиков может представить интерес рассмотренная в книге удивительно простая связь широко используемых в квантовой механике коэффициентов Клебша — Гордана с ортогональными полиномами дискретной переменной — полиномами Хáна, а также связь коэффициентов Рака́ с классическими ортогональными полиномами дискретной переменной на квадратичной сетке.

Так как знакомство со свойствами гамма-функции Эйлера является необходимой предпосылкой для изучения специальных функций, то в Дополнении, помещенном в конце книги, дается теория гамма-функции. Здесь же излагаются свойства интеграла Лапласа, которые используются при получении аналитического продолжения и асимптотических представлений для специальных функций. В конце книги приведены также Основные формулы.

Более подробную информацию о строении книги можно получить, используя оглавление и приведенную ниже схему зависимости глав:



Основной материал книги излагался в курсе лекций по методам математической физики, читавшемся в течение ряда лет на факультете теоретической и экспериментальной физики Московского инженерно-физического института, а также в спецкурсах на физическом, химическом факультетах и факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Во втором издании удалось улучшить ряд доказательств, в частности, дать новое доказательство основной теоремы, на которую опирается все содержание книги. Некоторые параграфы написаны проще, с привлечением нового материала. Впервые в литературе дано изложение теории классических ортогональных полиномов дискретной переменной на равномерных и неравномерных сетках, рассмотрены их приложения в физике.

Авторы глубоко благодарны академику А. А. Самарскому, взявшему на себя труд по редактированию первого издания книги, за его постоянное внимание и большую помощь в работе над книгой. Авторы благодарны Т. Т. Цирулису, В. Я. Арсенину, Б. Л. Рождественскому, сотрудникам кафедры теоретической и ядерной физики МИФИ, а также С. К. Суслову за полезные замечания по содержанию книги.

А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров