Дополнение

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ разлагаются в ряд Тейлора по степеням x для любых значений x $(-\infty < x < \infty)$. Эти ряды весьма быстро сходятся к порождающим их функциям.

Например, остаточный член ряда Тейлора функции e^x оценивается, как мы знаем (см. § 5.10), следующим образом:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}\right| \leqslant M(x)\frac{|x|^n}{n!},$$

$$M(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases} \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то остаток $R_n(x)$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю очень быстро. В случае, когда $|x| > 1$, убывание к нулю остатка хотя и имеет место, но много медленнее.

Остаточный член ряда Тейлора функции $\sin x$ по степеням x оценивается следующим образом (см. § 5.10):

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}.$$

Снова, если $|x| < 1$, остаток при $\nu \to \infty$ стремится к нулю очень быстро. Если же нам понадобится вычислить $\sin x$ для $1 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то можно воспользоваться разложением

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 - \frac{(\pi - x)^2}{2!} + \frac{(\pi - x)^4}{4!} - \ldots$$

по степеням $\pi/2 - x$, сходящимся для $|\pi/2 - x| < 1$ весьма быстро.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении логарифмов и корней.

Ф у н к ц и я $\ln x$. Зададим число $A > 1$. Если $1 < A < 2$, то представим A в виде

$$A = 1 + u \qquad (0 < u < 1)$$

и вычислим $\ln A$, воспользовавшись рядом Тейлора функции $\ln(1+u)$ по степеням u:

$$\ln A = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots \tag{1}$$

Если считать приближенно

$$\ln(1+u) \sim u - \frac{u^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{u^{n-1}}{n-1}, \tag{2}$$

то ошибка приближения будет равна

$$R_n(u) = (-1)^{n+1}\frac{u^n}{n} + (-1)^{n+2}\frac{u^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

и так как в правой части этого равенства стоит ряд Лейбница (с точностью до знака), то

$$|R_n(u)| \leqslant \frac{u^n}{n}. \tag{3}$$

Правая часть этого неравенства быстро стремится к нулю при $n \to \infty$, например, если $u < 0{,}1$. Чтобы получить при этом условии ошибку, меньшую, чем 10^{-k}, достаточно в приближенном равенстве (2) положить $n = k$. Однако, если бы мы пожелали достигнуть точности, равной 10^{-4} при $u = 1/2$, надо было бы взять $n = 10$:

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{(1/2)^{10}}{10} = \frac{1}{10240} < 10^{-4}.$$

Получается много вычислений. А ведь каждый их этап сопровождается еще ошибками другого рода — ошибками вычисления.

Ниже дается способ вычисления натурального логарифма любого числа $A > 1$. Этот способ, даже когда $A < 2$, имеет преимущество перед способом (2).

Имеем

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\right) =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x| < 1),$$

откуда следует приближенное равенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \sim 2\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (0 < x < 1) \tag{4}$$

с ошибкой

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{1-x}\right)x^n, \tag{5}$$

которая выводится следующим образом.

Приближенные равенства

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

имеют место с ошибками, не превышающими соответственно

$$\frac{x^{2n+2}}{2n+2}, \quad \frac{x^{2n+2}}{1-x}$$

(см. § 5.10, функция $\ln(1+x)$). Сложив эти ошибки, получим неравенство (5).

Заметим, что функция

$$\psi(x) = \frac{1+x}{1-x} \qquad (0 \leqslant x < 1)$$

строго монотонно возрастает на полуинтервале $[0, 1)$ и при этом

$$\psi(0) = 1, \qquad \lim_{x\to 1-0}\psi(x) = +\infty.$$

Приближенный метод (4) можно порекомендовать и в случае $1 < A < 2$. Например, чтобы вычислить $\ln(3/2)$, решаем уравнение

$$\frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x}$$

на полуинтервале $[0, 1)$. Получим

$$x = \frac{1}{5} \quad \left(\frac{1}{2} > \frac{1}{5}\ !\right).$$

На основании (4) запишем для примера два приближенных равенства

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3, \tag{6}$$

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \tag{7}$$

с ошибками соответственно

$$(n = 1) \qquad \left|R_3\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{935}, \tag{6'}$$

$$(n = 2) \qquad \left|R_5\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{11025}. \tag{7'}$$

Ряд (3), как мы видим, на этом примере сходится весьма быстро. Для сравнения применим метод (2), где надо положить $u = 1/2$. Имеем, например,

$$\ln\frac{3}{2} \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{60}$$

с ошибкой, не превышающей (см. (3))

$$(n = 6) \qquad \left|R_6\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(1/2)^6}{6} = \frac{1}{384}.$$

Здесь при вычислении $\ln(3/2)$ было использовано 6 членов ряда Тейлора и при этом получена ошибка, не превышающая $1/384$, что в 3 раза хуже ошибки (6), полученной с использованием только двух членов.

Заметим, что $u > x$. Ведь

$$u = \frac{1+x}{1-x} - 1 > 1 + x - 1 = x.$$

Число $\sqrt[k]{A}$. Пусть надо вычислить $\sqrt[k]{A}$ $(A > 0)$ для некоторого натурального числа k. Пусть пока

$$A = 1 + x,$$

где $0 < x < 1$. Тогда мы можем для вычисления данного корня

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{1+x}$$

воспользоваться рядом Тейлора

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k}x + \frac{1/k\,(1/k - 1)}{2!}x^2 + \ldots \qquad (0 < x < 1). \tag{8}$$

Заметим, что n-й член этого ряда получается из $(n-1)$-го члена умножением последнего на

$$\frac{(1/k) - n + 1}{n}x < 0 \qquad (n > 1).$$

Это число отрицательное, и модуль его меньше 1:

$$\frac{|(1/k) - n + 1|}{n}x = \frac{n - 1 - (1/k)}{n} < 1.$$

Поэтому ряд (8) есть ряд Лейбница и его n-й остаточный член

$$R_n(x) = \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{k} - n + 1\right)}{n!}x^n + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{k} - n\right)}{(n+1)!}x^{n+1} + \ldots$$

оценивается следующим образом:

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{n!}\right| x^n = \frac{\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(2-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(n-1-\frac{1}{k}\right)}{n!} x^n \leqslant x^n.$$

Таким образом, если считать приближенно, что

$$\sqrt[k]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{k}x + \frac{(1/k)((1/k)-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{(1/k)((1/k)-1)\ldots((1/k)-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} \qquad (|x| < 1), \tag{9}$$

то ошибка приближения будет удовлетворять неравенству

$$|R_n(x)| \leqslant x^n.$$

Если x достаточно мало, например $x < 0{,}1$, то полученный результат вполне удовлетворительный. Если, например, надо вычислить $\sqrt[k]{1+x}$ с точностью до 10^{-5}, можно воспользоваться для этой цели приближенной формулой (9), положив в ней $n = 5$. Мы, таким образом, должны взять сумму первых 5 членов разложения (8).

Однако, если $x = 1/2$, то для получения точности 10^{-5} пришлось бы оставить в ряду (8) 15 членов, потому что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{14} > 10^{-5}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{15} < 10^{-5}.$$

Это очень много. Не надо еще забывать, что с каждым отдельным этапом вычислений накапливается еще ошибка другого рода — ошибка вычислений.

Ниже дается метод решения поставленной задачи, годный для любого положительного числа A. Этот метод заключается в том, что число A записывается в виде произведения

$$A = (1+x)B^k \qquad (0 < x < 1),$$

где B подбирается так, чтобы число x было меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{(1+x)B^k} = B\sqrt[k]{1+x}$$

и вопрос сведется к приближенному вычислению $\sqrt[k]{1+x}$ при $0 < x < \varepsilon$.

Рассуждения можно расположить следующим образом. Задано произвольное натуральное число N. Рассматривая последовательно числа

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ 4^k,\ \ldots, \tag{10}$$

находим среди них число M_N^k такое, что

$$M_N^k \leqslant AN^k < (M_N+1)^k.$$

Если в левом неравенстве этого соотношения на самом деле $M_N^k = AN^k$, то поставленная задача решена:

$$A = \frac{M_N}{N}.$$

Будем считать далее, что

$$M_N^k < AN^k < (M_N+1)^k \tag{11}$$

или

$$1 < A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k < \left(\frac{M_N+1}{M_N}\right)^k.$$

Так как $M_N^k < AN^k < A(N+1)^k$ и M_{N+1}^k есть наибольшее число в последовательности (10), не превышающее $A(N+1)^k$, то

$$M_N^k \leqslant M_{N+1}^k \quad (N = 1, 2, \ldots).$$

Далее из второго неравенства (11) следует

$$N\sqrt[k]{A} < M_N + 1, \quad N\sqrt[k]{A} - 1 < M_N,$$

откуда $\lim\limits_{N\to\infty} M_N = \infty$. Но тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M_N + 1}{M_N} = 1. \tag{12}$$

Имеем

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k \left(\frac{M_N}{N}\right)^k} = \frac{M_N}{N}\sqrt[k]{A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k} = \frac{M_N}{N}\sqrt[k]{1+x}, \tag{13}$$

где мы положили

$$1 + x = A\left(\frac{N}{M_N}\right)^k. \tag{14}$$

Вопрос свелся к вычислению $\sqrt[k]{1+x}$.

В наших рассуждениях N есть произвольное натуральное число. Неравенства (11) можно записать следующим образом:

$$1 < 1 + x < \left(\frac{M_N + 1}{M_N}\right)^k,$$

где $x = x_N$ зависит от N. Из свойства (12) следует, что при достаточно большом N всегда можно $x = x_N$ сделать меньшим наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 0{,}1$.

Пример. Надо вычислить $\sqrt[3]{17}$ с точностью до 4-го знака.

Возьмем $N = 10$. Очевидно,

$$8000 < 17N^3 = 1700 < 27\,000.$$

Ясно, что число M_N надо искать, перебирая кубы натуральных чисел, находящиеся между 8000 и 27 000. Произведя эту переборку, получим

$$M_N^3 = 25^3 = 15625, \quad (M_N + 1)^3 = 17578,$$

$$M_N^3 < 17N^3 < (M_N + 1)^3.$$

Имеем

$$\sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{17\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^3\left(\frac{25}{10}\right)^3} = 2{,}5\sqrt[3]{17\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^3} \sim 2{,}5\sqrt[3]{1 + 0{,}1.}$$

Полагая в формуле (9) $n = 5$, получим приближенное равенство

$$\sqrt[3]{17} \approx 1 + \frac{1}{3}(0{,}1) + \frac{(1/3)((1/3) - 1)}{2!}(0{,}1)^2 +$$

$$+ \frac{(1/3)((1/3) - 1)((1/3) - 2)}{3!}(0{,}1)^2 + \frac{(1/3)((1/3)-1)((1/3)-2)((1/3)-3)}{4!}(0{,}1)^4$$

с ошибкой

$$R_5 < 10^{-5}.$$

Замечание. В § 5.10 мы исследовали сходимости ряда Тейлора функции $(1+x)^m$ на интервале $(-1, +1)$. Но при некоторых m ряд Тейлора

$$(1+x)^m = 1 + mx^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^{m-1} + \ldots \tag{15}$$

может сходиться также на том или ином конце этого интервала -1 или $+1$.

На основании 2-й теоремы Абеля, если степенной ряд (15) сходится при $x = 1$, то обязательно к 2^m.

Сходимость же ряда (14) при $x = -1$ указывает на тот факт, что функция $(1+x)^m$ должна быть непрерывна при $x = -1$. Это может быть лишь если $m \geqslant 0$, и тогда сумма ряда (14) при $x = -1$ равна нулю.