Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Вступление

Название «Математический анализ» представляет собой сокращенное видоизменение старого названия «Анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «Анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин.

Мы говорим «прежде всего», потому что дальнейшее развитие математического анализа привело к возможности изучения его методами более сложных образований, чем функции (функционалов, операторов и т. п.). Но об этом говорить пока рано. Ближайшей нашей задачей является изучение достаточно общих, встречающихся на практике функций методами бесконечно малых или, что все равно, методами пределов. В чем заключаются эти методы — это постепенно будет разворачиваться перед читателем в дальнейшем. Скажем пока, что эти методы, в частности, приводят к очень важным операциям над функциями — дифференцирования и интегрирования.

Параграфы 1.2, 1.3 посвящены понятиям множества и функции.

Следующие три параграфа, 1.4 — 1.6, носят чисто вводный характер. Из них читатель получит представление об основных понятиях математического анализа, которые будут подробно в развернутом виде изучаться в этой книге,— непрерывности, производной, неопределенного и определенного интегралов. Понятием предела мы, конечно, здесь пользуемся, но вовсе его пока не определяем и не разъясняем, всецело пока полагаясь на интуицию читателя. Возможен и такой способ чтения книги, при котором параграфы 1.4 — 1.6 выпускаются, с тем чтобы впоследствии возвратиться к ним по мере ссылок на них.

§ 1.2. Множество. Интервал, отрезок

Любое собрание или совокупность каких-либо предметов называют в математике *множеством*. Например, можно говорить о множестве всех деревьев, находящихся на данной поляне, или о множестве гусей, пасущихся на ней, или о множестве всех целых чисел. Если A обозначает некоторое заданное множество предметов, а x — один из этих предметов, то говорят, что x есть *элемент* множества A и записывают этот факт так: $x \in A$.

Если y не есть элемент A, то это записывают так: $y \overline{\in} A$ или $y \notin A$.

Если одно и то же множество оказалось обозначенным двумя буквами, A и B, пишут $A = B$, подчеркивая в случае необходимости, что здесь идет речь о теоретико-множественном равенстве, которое не надо смешивать с равенством между числами.

Если из того, что $x \in A$, всякий раз следует, что $x \in B$, то пишут $A \subset B$ и говорят, что A *входит* в B или A *есть подмножество или часть* B. Отдадим себе отчет в том, что при таком определении случай $A = B$ есть частный случай $A \subset B$. Ведь если не только $A \subset B$, но и $B \subset A$, то $A = B$, и наоборот.

Если множество состоит только из одного элемента x, то лучше его обозначить другой буквой, например, A, потому, что надо отличать логически множество, состоящее из одного элемента, от самого этого элемента. Необходимо еще формально ввести *пустое множество*, не содержащее в себе никаких элементов, которое обозначают так: $\varnothing$ (или O). По определению $O \subset A$, каково бы ни было множество A.

Из школьного курса математики мы знаем, что между действительными числами и точками прямой можно ввести взаимно однозначное соответствие*) при помощи следующего правила. Числу 0 приводится во взаимно однозначное соответствие произвольно выбранная на прямой точка O — нулевая точка. Длина некоторого определенного отрезка принимается за единицу. Каждому действительному числу $\pm a$ $(a > 0)$ приводится в соответствие точка прямой, отстоящая от нулевой точки на расстоянии, равном a, и лежащая правее или левее O, в зависимости от того, стоит ли перед a знак «+» или «−». Наоборот, если A есть какая-либо точка нашей прямой, отстоящая от 0 на расстоянии a, то ей приводится в соответствие число $+a$ или $-a$, в зависимости от того, лежит ли A правее или левее 0.

Прямая, все точки которой описанным выше образом приведены в соответствие со всеми действительными числами, называется *числовой прямой* или *действительной осью*. Точки ее называются числами, которые они представляют. Таким образом, можно говорить о точке 0, 1, 1,2, $\sqrt{2}$ и т. д. Мы будем позволять себе числа называть *точками* (*числовой прямой*) и, наоборот, точки числами.

Пусть числа (точки) a и b удовлетворяют неравенству $a < b$.

---

*) По этому поводу см. дальше § 2.7.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (с концами a, b) или *сегментом* и обозначается так: $[a, b]$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* (с концами a, b) или *открытым отрезком* и обозначается так: (a, b).

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, обозначаются соответственно $[a, b)$, $(a, b]$ и называются *полуоткрытыми отрезками* или *полуинтервалами*. Первый, например, *закрыт* слева и *открыт* справа.

Часто рассматривают еще множества, называемые *бесконечными интервалами* или *полуинтервалами*: 1) $(-\infty, \infty)$, 2) $(-\infty, a]$, 3) $(-\infty, a)$, 4) (a, ∞), 5) $[a, \infty)$.

Первое из них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая); остальные состоят из всех чисел, для которых соответственно: 2) $x \leqslant a$, 3) $x < a$, 4) $a < x$, 5) $a \leqslant x$.

В связи с этой терминологией удобно употреблять слова *конечное* или *бесконечное число*. Конечное число — это просто число. Бесконечное же число на самом деле не есть число — это символ $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что у отрезка $[a, b]$ концы всегда конечны. У интервала же (a, b) «концы» могут быть конечными и бесконечными числами.

Пишут еще

$$[a, b] = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) = \{x\colon a < x < b\}.$$

Например, правая часть первого из этих множественных равенств читается так: множество всех чисел (точек) x, для которых выполняются неравенства $a \leqslant x \leqslant b$.

Пусть A и B — два множества любой природы. *Суммой* или *объединением* A и B называется множество, обозначаемое через $A + B$ или $A \cup B$, представляющее собой совокупность всех элементов A и B.

Разностью A и B называется множество, обозначаемое через $A \setminus B$ (или $A - B$), представляющее собой совокупность всех элементов A, не принадлежащих B.

Пересечением A и B называется множество, обозначаемое через AB или $A \cap B$, представляющее собой совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит как A, так и B.

Справедливо теоретико-множественное равенство

$$(A \pm B)C = AC \pm BC, \tag{1}$$

где A, B, C — произвольные множества. Например, в случае «+» оно доказывается так. Если элемент x принадлежит левой части (1), то он принадлежит одновременно как $A + B$, так и C. Но тогда x обязательно принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Пусть для определенности $x \in A$; тогда $x \in AC$, а следовательно, и правой части (1). Наоборот, пусть x принадлежит правой части равенства; тогда x принадлежит одному из множеств AC или BC. Пусть для определенности $x \in AC$; тогда x принадлежит как A, так и C, следовательно, x принадлежит как $A+B$, так и C, т. е. левой части (1).

Понятие суммы множеств естественно распространяется на любое конечное и даже бесконечное число слагаемых (множеств).

Выражения

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_1 + \ldots + A_N, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \ldots$$

обозначают объединения всех элементов множеств $A_1, \ldots, A_N$, соответственно $A_1, A_2, \ldots$, и называются *суммами* или *объединениями* указанных множеств.

Справедливы равенства

$$C \bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{k=1}^{N} CA_k, \quad C \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} CA_k$$

(аналогичные (1) в случае «+»), где C — произвольное множество.

Примеры.

1) $[0, 2] + [1, 3] = [0, 3]$; 2) $[0, 2] - [1, 3] = [0, 1)$; 3) $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1] = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1) = R$, где R — множество всех действительных чисел.

§ 1.3. Функция

Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана *функция* (однозначная), которую записывают так:

$$y = f(x) \quad (x \in E). \tag{1}$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле*). Множество E называют областью задания или определения функции $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E, и каждому $x \in E$ в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией* или *зависимой переменной*. Независимую переменную называют *аргументом*.

---

*) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Л. Дирихле (1805—1859) немецкий математик.