довательно, и правой части (1). Наоборот, пусть x принадлежит правой части равенства; тогда x принадлежит одному из множеств AC или BC. Пусть для определенности $x \in AC$; тогда x принадлежит как A, так и C, следовательно, x принадлежит как $A+B$, так и C, т. е. левой части (1).

Понятие суммы множеств естественно распространяется на любое конечное и даже бесконечное число слагаемых (множеств).

Выражения

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_1 + \ldots + A_N, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \ldots$$

обозначают объединения всех элементов множеств $A_1, \ldots, A_N$, соответственно $A_1, A_2, \ldots$, и называются *суммами* или *объединениями* указанных множеств.

Справедливы равенства

$$C \bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{k=1}^{N} CA_k, \quad C \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} CA_k$$

(аналогичные (1) в случае «+»), где C — произвольное множество.

Примеры.

1) $[0, 2] + [1, 3] = [0, 3]$; 2) $[0, 2] - [1, 3] = [0, 1)$; 3) $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1] = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} [k, k+1) = R$, где R — множество всех действительных чисел.

§ 1.3. Функция

Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана *функция* (однозначная), которую записывают так:

$$y = f(x) \quad (x \in E). \tag{1}$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле*). Множество E называют областью задания или определения функции $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E, и каждому $x \in E$ в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией* или *зависимой переменной*. Независимую переменную называют *аргументом*.

*) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Л. Дирихле (1805—1859) немецкий математик.

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество E точек x действительной прямой — *область определения* или *задания функции*, и закон, в силу которого каждой точке $x \in E$ приводится в соответствие число $y = f(x)$.

Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводящем в соответствие каждому числу $x \in E$ некоторое число y, то достаточно ее обозначить одной буквой f. Символ $f(x)$ обозначает число y, которое в силу закона f соответствует значению $x \in E$. Если, например, число 1 принадлежит области E задания функции f, то $f(1)$ есть *значение функции* f в точке $x = 1$. Если 1 не принадлежит E ($1 \overline{\in} E$), то говорят, что функция f *не определена* в точке $x = 1$.

Множество E_1 всех значений $y = f(x)$, где $x \in E$, называется *образом* множества E при помощи функции f. Иногда пишут в таком случае $E_1 = f(E)$. Но это обозначение надо употреблять с осторожностью, по возможности разъясняя его всякий раз, когда оно употребляется, чтобы не было путаницы с обозначением $y = f(x)$, где x есть произвольная точка (число), принадлежащая множеству E, а y — соответствующая ей при помощи функции (закона f) точка множества E_1. Говорят еще, что функция f *отображает* множество E *на* множество E_1.

Если образ $E_1 = f(E) \subset A$, где A — множество чисел, вообще не совпадающее с E_1, то говорят, что функция f *отображает* E *в* A.

Для функций f и φ, заданных на одном и том же множестве E, определяются *сумма* $f + \varphi$, *разность* $f - \varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* $\frac{f}{\varphi}$. Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x) + \varphi(x), f(x) - \varphi(x), f(x)\varphi(x), \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \ x \in E, \qquad (2)$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E.

Для обозначения функции употребляют и любые другие буквы, F, Φ, Ψ, ..., так же как вместо x, y можно писать z, u, v, w, ...

Если функция f отображает множество E в E_1, а функция F отображает множество E_1 во множество E_2, то функцию $z = F(f(x))$ называют *функцией от функции*, или *сложной функцией*, или *суперпозицией* f и F. Она определена на множестве E и отображает E в E_2.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций: $z = F_1(F_2(F_3 \ldots (F_n(x)) \ldots))$.

Практика доставляет нам много примеров функций. Например, площадь S круга есть функция его радиуса r, выражаемая формулой $S = \pi r^2$. Эта функция определена, очевидно, на множестве всех положительных чисел r.

Можно, не связывая вопрос с площадью круга, говорить о зависимости между переменными S и r, выраженной формулой

$S = \pi r^2$. Функция $S = \varphi(r)$, заданная этой формулой, определена на всей действительной оси, т. е. для всех действительных чисел r — не обязательно только положительных.

Ниже приводятся примеры функций, заданных формулами:

$$1)\ y = \sqrt{1-x^2},\quad 4)\ y = \frac{x^2-1}{x-1},$$
$$2)\ y = \lg(1+x),\quad 5)\ y = \arcsin x.$$
$$3)\ y = x - 1,$$

Мы имеем в виду действительные функции, принимающие действительные значения y для действительных значений аргумента x. Нетрудно видеть, что областями определения приведенных функций являются соответственно:

1) отрезок $[-1, 1] = \{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$;

2) множество $x > -1$;

3) вся действительная ось;

4) вся действительная ось, из которой исключена точка $x = 1$;

5) отрезок $[-1, +1]$.

Функции, определяемые в примерах 1) и 2), можно рассматривать как функции от функции: 1) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - v$, $v = x^2$; 2) $y = \lg u$, $u = 1 + x$.

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную систему координат x, y (рис. 1.1), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобразим любую кривую Γ, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка $x \in [a, b]$, прямая, проходящая через нее параллельно оси y, пересекает кривую Γ в одной точке A. Такую заданную в прямоугольной (декартовой) системе координат кривую Γ мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение $y = f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 1.1). Следовательно, при помощи графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y = f(x)$.

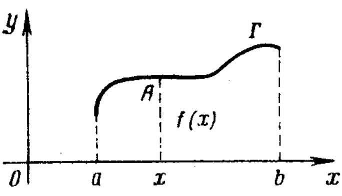

Рис. 1.1.

Мы задали функцию при помощи графика на множестве E, являющемся отрезком $[a, b]$. В других случаях E может быть интервалом, полуинтервалом, всей действительной осью, множеством рациональных точек, принадлежащих к данному интервалу, и т. д.

Зададим на некотором интервале (a, b) функцию $f(x)$ и произвольное (постоянное) число $\alpha \neq 0$. С помощью α и f можно сконструировать ряд других функций: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x) + \alpha$;

3) $f(x-\alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. Функции 1) и 2) определены на том же интервале (a, b). Ординаты графика функции 1) увеличены в α раз сравнительно с соответствующими ординатами $f(x)$. График функции 2) получается из графика f поднятием последнего на величину α *); график же функции 3) получается из графика f путем сдвига последнего вправо на величину α. Наконец, функция 4) при $\alpha>0$ определена, очевидно, на интервале $(a/\alpha, b/\alpha)$; график ее получается из графика f путем равномерного его сжатия в α раз.

Функцию f называют *четной* или *нечетной*, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки и обладает на нем свойством $f(-x)=f(x)$ или свойством $f(-x)=-f(x)$.

График четной функции, очевидно, симметричен относительно оси y, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, x^{2k} (k — натуральное), $\cos x$, $\ln|x|$, $\sqrt{1+x^2}$, $f(|x|)$ — четные функции, а x^{2k+1} ($k\geqslant 0$ — целое), $\sin x$, $x\sqrt{1+x^2}$, $xf(|kx|)$ — нечетные функции.

Нетрудно видеть, что *произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.*

Конечно, большинство функций не четны и не нечетны.

Функция на различных частях области ее определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t=0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 *км* в час и, прибыв в пункт B, стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью 80 *км* в час. Тогда функция $s=f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) поезда от A в момент времени t, очевидно будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t)=\begin{cases}100t & (0\leqslant t\leqslant 2),\\ 200 & (2\leqslant t\leqslant 3),\\ 200+80(t-3) & (3\leqslant t\leqslant 6).\end{cases}$$

Функция может быть задана в виде таблицы. Например, мы могли бы измерять температуру T воздуха через каждый час. Тогда каждому моменту времени $t=0, 1, 2, \ldots, 24$ соответствовало бы определенное число T в виде таблицы:

t	0	1	2	3	...
T	T_0	T_1	T_2	T_3	...

*) Конечно, при $\alpha<0$ поднятие или сдвиг вправо на величину α надо понимать как соответственно опускание или сдвиг влево на величину $|\alpha|$.

Таким образом, мы получили бы функцию $T = f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 24, заданную таблицей.

Если функция $y = f(x)$ задана на некотором множестве E формулой, то всегда можно считать, что ей соответствует вполне определенный график, определяющий геометрически эту функцию. Обратное совсем не ясно: если функция задана произвольным графиком, то может ли она быть выраженной некоторой формулой? Это очень сложный вопрос. Чтобы ответить на него, надо отдать себе отчет в том, какой смысл мы вкладываем в слово формула. Выше, когда мы говорили, что данная функция $y = f(x)$ выражается формулой, мы молчаливо считали, что при этом y получается из x при помощи конечного числа таких операций, как сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня той или иной степени, логарифмирование, взятие операции sin, cos, arcsin и других алгебраических и тригонометрических операций.

Математический анализ дает средства для значительного расширения понятия формулы. Весьма важным таким средством является разложение функции в бесконечный ряд по элементарным функциям.

Многие, а может быть и все, встречающиеся на практике функции могут быть изображены формулой, представляющей собой некоторый бесконечный ряд, членами которого являются элементарные функции, которые будут определены ниже. Но сейчас об этом говорить не время. Мы еще не готовы к этому.

Так или иначе, задана ли функция $f(x)$ формулой или же она задана другим каким-либо способом, например, при помощи графика, она уже может служить объектом изучения средствами математического анализа, если она удовлетворяет некоторым дополнительным общим свойствам, таким как непрерывность, монотонность, выпуклость, дифференцируемость и др. Но об этом будет идти речь впереди.

Важнейшим средством изучения функции является понятие предела, являющееся основным понятием математического анализа. Следующая глава посвящена этому понятию.

Если каждому числу x, принадлежащему данному множеству E чисел, в силу некоторого закона соответствует определенное множество e_x чисел y, то говорят, что этим законом определена *многозначная функция* $y = f(x)$. Если окажется, что e_x для каждого $x \in E$ состоит только из одного числа y, то мы получим однозначную функцию.

Однозначную функцию называют просто «функцией» без добавления прилагательного «однозначная», если только это не приводит к недоразумениям.

Алгебра и тригонометрия доставляют нам примеры многозначных функций; такими являются функции $\sqrt{x}$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctg} x$, ...

Функция $\sqrt{x}$ определена для $x \geqslant 0$. Она двузначна*) для $x > 0$: каждому положительному x соответствуют два действительных числа, отличающихся между собой знаками, квадраты которых равны x. Что же касается функции $\operatorname{Arcsin} x$, то она бесконечнозначна. Она приводит в соответствие каждому значению x из отрезка $[-1, +1]$ бесконечное множество значений y, которые могут быть записаны по формуле

$$y = (-1)^k \arcsin x + k\pi \qquad (k = 0, 2, \ldots).$$

Выше мы говорили о функциях от одной переменной. Но можно говорить также о функциях двух, трех и вообще n переменных.

Функция от двух переменных определяется следующим образом. Рассматривается множество E пар чисел (x, y). При этом имеются в виду *упорядоченные* пары. Это значит, что две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными (совпадающими) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Если в силу некоторого закона каждой паре $(x, y) \in E$ приведено в соответствие число z, то говорят, что этим определена на множестве E *функция* $z = f(x, y)$ *от двух переменных*, x и y.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости, где введена декартова система координат, точка с абсциссой x и ординатой y, и, наоборот, каждой точке таким образом соответствует пара (x, y), то можно говорить, что наша функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

Функции $z = f(x, y)$ от двух переменных изображают в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), в виде геометрического места точек $(x, y, f(x, y))$, проекции которых принадлежат множеству E определения f.

Например, таким геометрическим местом для функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

является верхняя половина шаровой поверхности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

В этом же духе можно определить функцию трех переменных. Областью ее определения может теперь служить некоторое множество E упорядоченных троек чисел (x, y, z) или, что все равно, им соответствующих точек трехмерного пространства, где введена декартова система координат.

Если каждой тройке чисел (точке трехмерного пространства) $(x, y, z) \in E$ в силу некоторого закона соответствует число u, то говорят, что этим определена на E функция $u = F(x, y, z)$.

---

*) Впрочем, символ $\sqrt[k]{x}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ мы будем понимать всюду, если это не оговорено особо, как арифметическое значение корня k-й степени из $x \geqslant 0$, т. е. как неотрицательное число, k-я степень которого равна x.

Аналогично можно рассматривать множество E упорядоченных систем $(x_1, \ldots, x_n)$ из n чисел, где n — заданное натуральное число. Опять, если каждой такой системе, принадлежащей E, соответствует в силу некоторого закона число z, то говорят, что z есть *функция от переменных* $x_1, \ldots, x_n$, определенная на множестве E, и записывают эту функцию в виде $z = F(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае $n > 3$ в нашем распоряжении уже нет реального n-мерного пространства, чтобы использовать его для изображения систем $(x_1, \ldots, x_n)$ в виде принадлежащих ему точек. Но математики выдумали n-мерное пространство, и оно им благополучно служит, и притом не хуже чем реальное трехмерное пространство. Именно, n-мерным пространством называется множество всевозможных систем n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ (см. § 6.1).

Если две функции, f и φ, от n переменных заданы на одном и том же множестве E систем $(x_1, \ldots, x_n)$ — точек n-мерного пространства,— то можно определить сумму $f + \varphi$, разность $f - \varphi$, произведение $f\varphi$ и частное f/φ как функции, определенные на E при помощи равенств, аналогичных равенствам (2), где надо только числа x заменить системами $(x_1, \ldots, x_n)$. Естественным образом определяются также сложные функции, такие как $f(\varphi(x, y), \psi(x, y, z)) = F(x, y, z)$, где (x, y, z) — тройки чисел, принадлежащих некоторому множеству троек.

Ниже приводится несколько примеров функций многих переменных, заданных посредством элементарных формул.

Пример 1. $u = Ax + By + Cz + D$, где A, B, C, D — заданные постоянные действительные числа, есть линейная функция от трех переменных (x, y, z). Она задана на всем трехмерном пространстве. Более общая линейная функция от n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ задается формулой $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, где $a_1, \ldots, a_n$, b — заданные постоянные числа. Эта формула определена в любой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, или, как еще говорят, на всем n-мерном пространстве.

Пример 2. $z = \lg \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Эта действительная функция задана на области, представляющей собой круг радиуса 1 с центром в $(0, 0)$, из которого удалены все граничные точки, т. е. точки окружности радиуса 1 с центром $(0, 0)$. Для этих точек наша функция не определена, потому что $\lg 0$ не имеет смысла.

Пример 3. Функция

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для } y \geqslant 0, \\ 1 & \text{для } y < 0 \end{cases}$$

геометрически изображается двумя параллельными полуплоскостями, не связанными между собой. Расположение их по отношению к системе координат (x, y, z) очевидно.

Функция от одной переменной может быть задана неявным образом при помощи равенства

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

где F есть функция от двух переменных x и y.

Пусть на некотором множестве G точек (x, y) задана функция F. Равенство (3) определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Конечно, в частности Ω может быть пустым множеством. Пусть Ω — непустое множество, и пусть E есть множество (очевидно, непустое) таких значений x (чисел), которым соответствует хотя бы один y так, что пара x, y принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех чисел x, каждому из которых соответствует непустое множество e_x чисел y так, что $(x, y) \in \Omega$, или, что все равно, так, что для указанной пары (x, y) выполняется равенство (3). Этим определена на множестве E некоторая функция $y = \varphi(x)$ от x, вообще говоря, многозначная. В этом случае говорят, что функция φ *определена неявно* при помощи равенства (3). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \text{ для всех } x \in E.$$

По аналогии можно также определить функцию $x = \psi(y)$ от переменной y, определяемую неявно при помощи равенства (3). Для нее выполняется тождество

$$F(\psi(y), y) \equiv 0 \text{ для всех } y \in E_1,$$

где E_1 есть некоторое множество чисел. Говорят еще, что функция $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$) удовлетворяет уравнению (3).

Функцию $x = \psi(y)$ называют *обратной* по отношению к функции $y = \varphi(x)$.

Пример 4. Уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4}$$

где $r > 0$ неявно определяет двузначную функцию от одной переменной

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leqslant x \leqslant r);$$

впрочем, при $x = \pm r$ она однозначна.

Естественно считать, что эта двузначная функция распадается на две непрерывные однозначные функции $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$. Графики их (полуокружности) в совокупности дают окружность радиуса r с центром в начале координат. Эта окружность есть геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению (4).

Перейдем к более общему n-мерному случаю. Пусть на некотором множестве G точек $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства задана функция $F(x_1, \ldots, x_n)$. Равенство

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{5}$$

определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Пусть Ω — непустое множество и пусть E — множество (непустое!) таких систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, которым соответствует хотя бы одно значение x_n такое, что точка $(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех систем $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, каждой из которых соответствует непустое множество $e_{x_1,\ldots,x_{n-1}}$ чисел x_n таких, что $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, или, что все равно, таких, что для $(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется равенство (5) Этим определена на множестве E некоторая функция $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ от $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, вообще говоря, многозначная. Говорят, что функция φ определена неявно при помощи равенства (5). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \equiv 0 \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E.$$

Элементарные функции

1. *Постоянная функция* C. Каждому действительному числу x соответствует y, равный одному и тому же числу C. График этой функции (в прямоугольной системе координат) есть прямая, параллельная оси x, находящаяся на расстоянии $|C|$ от оси x и расположенная выше оси x, если $C > 0$, и ниже оси x, если $C < 0$.

2. *Степенная функция* x^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При n положительном целом функция x^n определена на всей действительной оси. При n отрицательных целых она определена на всей действительной оси, за исключением точки $x = 0$. Неудобно во всех случаях считать 0^0 вполне определенным числом (см. далее § 5.14). Конечно, например, при рассмотрении функции $y = x^0$, может оказаться удобным формально считать, что $0^0 = 1$. Ведь тогда эта функция будет иметь непрерывный график (прямую, параллельную оси x) для всех значений x.

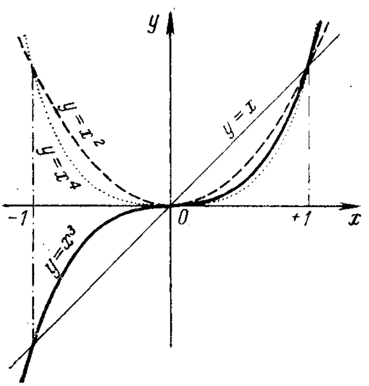

Рис. 1.2.

На рис. 1.2 приведены графики функций $y = x$, x^2, x^3, x^4.

3. *Многочленом степени* n называется функция вида

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — *постоянные коэффициенты* и n есть заданное натуральное число. Многочлен степени n получается из постоянных a_k $(k = 0, \ldots, n)$ и функций $x, x^2, \ldots, x^n$ при помощи конечного числа арифметических действий: сложения, вычитания и умножения.

Многочлен называют также *целой рациональной функцией* (*степени* n). Областью его определения является вся действительная ось.

4. *Рациональной функцией* называется функция вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ и $Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ — некоторые многочлены $(b_m \neq 0)$.

Рациональная функция определена для всех x действительной оси, кроме нулей многочлена Q, т. е. точек x, для которых $Q(x) = 0$. Количество таких точек не превышает m.

Рациональная функция получается из некоторых постоянных и функций вида x^k (k натуральное) путем применения к ним арифметических действий (в конечном числе): сложения, вычитания, умножения и деления.

5. *Степенная функция* x^a (a — постоянное число) изучается в школьном курсе алгебры. Однако не все, связанное с этой функцией, полностью обосновывается в обычных школьных курсах алгебры. Например, определение x^a, когда a есть иррациональное число, основано на достаточно тонких понятиях из теории пределов. После того как будет изложена теория пределов, мы вернемся к функции x^a, дадим ее исчерпывающее определение и докажем ее свойства.

6. *Показательная функция* a^x ($a > 0$). Эта функция также известна из школьного курса алгебры. Однако про нее, так же как и про степенную функцию, можно сказать, что связанные с нею определения и свойства обычно не полностью получают обоснование в школьном курсе. Поэтому к функции a^x мы еще вернемся. Обратная к a^x есть функция $\lg_a x$.

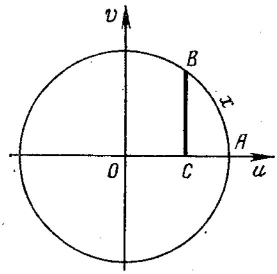

Рис. 1.3.

7. *Функция* $\sin x$ известна читателю из курса тригонометрии. Она определяется там из геометрических соображений. Напомним определение $\sin x$. Зададим число x. Отложим на окружности радиуса 1 от начальной точки A (рис. 1.3) дугу длины $|x|$ в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если $x > 0$, или в направлении движения часовой стрелки, если $x < 0$. Длина дуги исчисляется в радианах. Пусть B есть конец дуги. Тогда длина перпендикуляра BC к прямой OA, взятая со знаком «+», если B будет выше OA, и со знаком «−», если B будет ниже OA, есть $y = \sin x$.

В этом же известном читателю духе определяются функции $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\operatorname{ctg} x$ и устанавливаются их свойства.

Затем определяются обратные *тригонометрические функции* $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, ...

Все перечисленные в пп. 1—7 функции могут быть названы *простейшими элементарными функциями*. Всякая функция, составленная из простейших элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, если количество примененных при этом указанных операций конечно, называется *элементарной функцией*. Такую функцию мы и называем функцией, заданной формулой.

Примеры элементарных функций: $\sin x^2$, $(\sin x)^2$, $\operatorname{tg} \lg \sqrt{1-x^2}$, $\cos n \arccos x$, $x^x = a^{x \log_a x}$ $(a > 0)$.

Полярная система координат. В плоскости зададим луч OL (*полярную ось*), выходящий из точки O — *полюса полярной системы координат* (рис. 1.4).

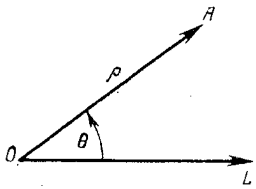

Рис. 1.4.

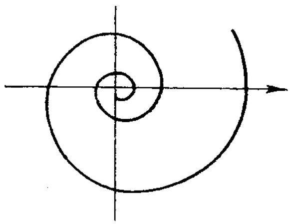
Рис. 1.5.

Произвольная точка A плоскости определяется парой чисел (ρ, θ) — ее *полярными координатами*, где ρ — расстояние A до O, а θ — выраженный в радианах угол между OL и OA. Точка O исключительная. Она определяется парой $(0, \theta)$, где θ — произвольное число. Угол θ отсчитывается против часовой стрелки. Функцию $\rho = f(\theta)$, заданную на интервале (отрезке или произвольном множестве E значений θ) можно интерпретировать как множество точек (ρ, θ) плоскости, где $\theta \in E$, $\rho = f(\theta)$. Многие

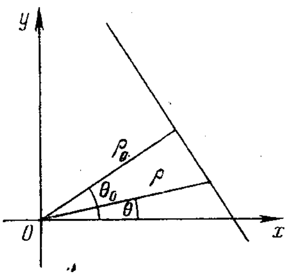

Рис. 1.6.

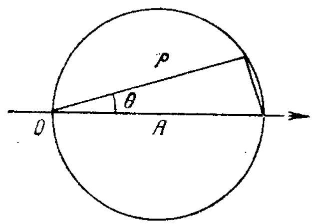

Рис. 1.7.

кривые на плоскости могут быть описаны в полярных координатах соответствующими функциями $\rho = f(\theta)$ (многозначными или однозначными). Например, 1) функция $\rho = a^\theta$ $(a > 0$, $-\infty < \theta < \infty)$ описывает в полярных координатах спираль Архимеда (рис. 1.5); 2) функция

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}, \quad \theta \in \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2},\ \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \rho_0 > 0$$

описывает такую прямую, что опущенный на нее из полюса O

перпендикуляр имеет длину ρ_0 и образует с полярной осью угол θ_0 (рис. 1.6); функция $\rho = 2\cos\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ описывает окружность радиуса 1 с центром в точке $A(1, 0)$ (рис. 1.7).

§ 1.4. Понятие непрерывности функции

На рис. 1.8 изображен график функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Его естественно назвать непрерывным графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) $x \in [a, b]$. Близкая к ней другая точка $x' \in [a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число положительное

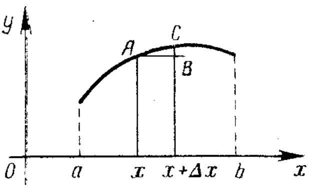

Рис. 1.8.

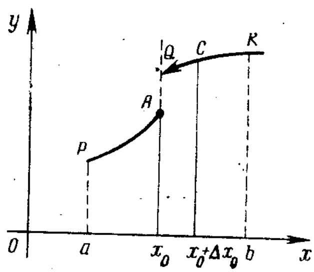

Рис. 1.9.

или отрицательное, называемое *приращением* x. Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. На рис. 1.8 Δy равно длине отрезка BC.

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь график, изображенный на рис. 1.9. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно и потому график естественно назвать разрывным. Чтобы график изображал однозначную функцию $y = F(x)$ в точке x_0, условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0.