перпендикуляр имеет длину ρ_0 и образует с полярной осью угол θ_0 (рис. 1.6); функция $\rho = 2\cos\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ описывает окружность радиуса 1 с центром в точке $A(1, 0)$ (рис. 1.7).

§ 1.4. Понятие непрерывности функции

На рис. 1.8 изображен график функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Его естественно назвать непрерывным графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) $x \in [a, b]$. Близкая к ней другая точка $x' \in [a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число положительное

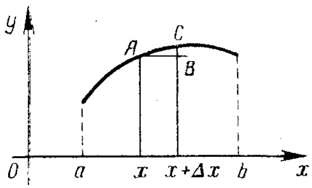

Рис. 1.8.

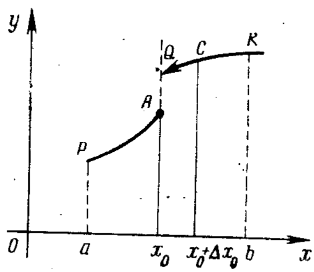

Рис. 1.9.

или отрицательное, называемое *приращением* x. Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. На рис. 1.8 Δy равно длине отрезка BC.

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь график, изображенный на рис. 1.9. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно и потому график естественно назвать разрывным. Чтобы график изображал однозначную функцию $y = F(x)$ в точке x_0, условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0.

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение (принадлежащее Коши). Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной в точке x этого отрезка, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx* *), *стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю.* Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (1) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{2}$$

Запись (2) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его.

Если определенная на $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке $x \in [a, b]$, т. е. если для нее не выполняется свойство (2) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной* в точке x.

Функция, изображенная на рис. 1.8, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, функция же, изображенная на рис. 1.9, очевидно, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, за исключением точки x_0, потому что для последней соотношение (2) не выполняется, когда $\Delta x_0 \to 0$, оставаясь положительным.

Данное определение непрерывности функции в точке, само по себе совершенно корректное, базируется пока на интуитивном понимании понятия предела. После того как будет изложена теория пределов, это определение, которое может быть расширено и на случай функций многих переменных, получит полное обоснование.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной* на нем.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции).

*) Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x \in [a, b]$.

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризующуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды — твердые, жидкие или газообразные, например, металлы, воду, воздух. На самом деле, всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например, гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности естественно играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

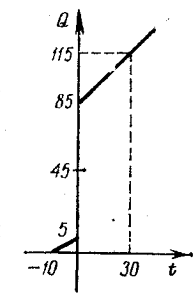

Рис. 1.10.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которым оперирует математический анализ.

Примерами непрерывных функций могут служить элементарные функции, определенные в § 1.3. Они непрерывны на интервалах изменения x, где они определены.

Разрывные функции в математике отражают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками. Например, зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий, находящегося в ней тепла, когда t изменяется между $-10°$ и $+10°$, если принять условно, что при $-10°$ величина $Q = 0$ выражается следующими формулами:

$$Q(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & -10 \leqslant t < 0, \\ t + 85, & 0 < t < 30. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной — многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например, $f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, очевидно, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 1.10.