§ 1.5. Производная

Понятие производной возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой или о вычислении скорости неравномерного движения. Подобные задачи и задача о вычислении площади криволинейной фигуры интересовали математиков с древних времен. В XVII веке в работах Ньютона и Лейбница эта деятельность получила определенное теоретическое завершение. Ньютон и Лейбниц создали общие методы дифференцирования и интегрирования функций и доказали важную теорему, носящую их имя, устанавливающую тесную связь между операциями дифференцирования и интегрирования. Надо, однако, иметь в виду, что современное изложение этих вопросов существенно отличается от того, как они излагались во времена Ньютона и Лейбница. В рассуждениях и понятиях, которыми оперировали в то время, с нашей точки зрения можно найти много неясного; да и сами математики того времени это сознавали, о чем свидетельствуют ожесточенные дискуссии, которые происходили по этим вопросам между ними.

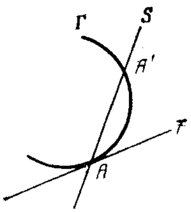

Рис. 1.11.

Современный математический анализ базируется на понятии предела, которое выкристаллизовалось в четкую формулировку не так уж давно — в первой половине прошлого столетия. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши.

Понятие предела существенно используется в определениях понятий непрерывности функции, производной, интеграла.

Мгновенная скорость. Пусть точка движется по прямой и функция $s = f(t)$ выражает зависимость от времени $t \in (a, b)$ ее расстояния (с учетом знака *)) s до некоторой начальной точки O прямой. В момент времени $t \in (a, b)$ точка находится на расстоянии $s = f(t)$ от O. В момент же времени $t + \Delta t \in (a, b) (\Delta t \neq 0)$ она находится на расстоянии $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ от O. Средняя скорость ее на промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенную или истинную скорость v точки в момент времени t естественно определить как предел, к которому стремится $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

*) Точнее, s есть координата точки прямой, где заданы начальная точка O, единичный отрезок и положительное направление.

Касательная к кривой. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую *) Г в плоскости или пространстве (рис. 1.11). Пусть A — лежащая на ней точка, и A' — другая лежащая на Г точка. Прямую S, проходящую через A и A', будем называть *секущей* (кривую Г). Будем теперь точку A' двигать непрерывно по Г, неограниченно приближая к A. Тогда секущая S будет вращаться относительно A. Может случиться, что при этом S будет стремиться занять в пределе положение вполне определенной (проходящей, очевидно, через A) прямой, которую мы обозначили через T. Если это будет иметь место, то говорят, что кривая Г имеет в точке A *касательную*. Именно, прямую T называют *касательной* к Г в точке A.

Не всякая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Тривиальным примером этого может служить кривая, изображенная на рис. 1.12. Она состоит из двух гладких **) кусков Γ_1 и Γ_2, соединенных в точке A «под углом». На рисунке на

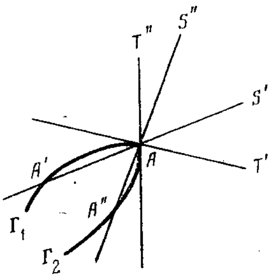

Рис. 1.12.

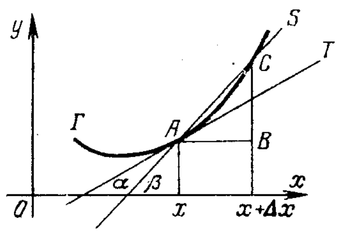

Рис. 1.13.

Г отмечены две другие точки, A', A'', соответственно лежащие на Γ_1, Γ_2; через S' и S'' обозначены проходящие через A', A'' и и A секущие.

Очевидно, что если A', A'', двигаясь соответственно по Γ_1, Γ_2, будут приближаться к A, то секущие S', S'' будут стремиться занять в пределе положение двух разных прямых T' и T''. Поэтому рассматриваемая кривая не имеет касательной в точке A. Впрочем, можно было бы, развивая введенное определение, сказать, что наша кривая имеет в точке A две односторонние касательные, но об этом речь сейчас не идет.

---

*) Строгое определение непрерывной кривой будет дано в § 6.5. Согласно этому определению произвольная точка $A \in \Gamma$ непрерывно зависит от параметра (числа) t, пробегающего интервал или отрезок. Если точки A, $A' \in \Gamma$ определяются соответственно значениями t, t' параметра и если t' стремится к t, то говорят, что A' стремится (неограниченно приближается) к A, двигаясь по Г.

**) Строгое описание гладкого куска кривой дано в § 6.5.

Пусть теперь кривая Γ есть график непрерывной на (a, b) функции (рис. 1.13) $y = f(x)$.

Зададим на Γ точку A, имеющую абсциссу x, и другую точку, C, имеющую абсциссу $x + \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$. Секущая S, проходящая через A и C, очевидно, образует с положительным направлением оси x угол β, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Будем Δx стремить к нулю; тогда, вследствие непрерывности f, будет также Δy стремиться к нулю, и точка C, двигаясь по Γ, будет стремиться к точке A. Если окажется (этого может и не быть!), что при этом отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при любом способе стремления Δx к нулю к одному и тому же конечному пределу (числу) k:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \qquad (\Delta x \to 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому отличному от $\pi/2$ углу α. Вместе с β и секущая S, вращаясь около точки A, будет стремиться занять в пределе положение прямой T, проходящей через A под углом α с положительным направлением оси x. Но тогда T есть касательная к Γ в точке A и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Мы установили, что, *если отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$ *стремится к конечному пределу, то кривая* Γ *имеет в точке* A *касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси* x *равен этому пределу.*

Сила тока. Допустим, что известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t. За период от t до $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t - \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ дает силу тока в момент t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Производная. Все три рассмотренные задачи, несмотря на то, что они относятся к различным областям человеческого знания — механике, геометрии, теории электричества,— привели к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над некоторой функцией. Надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Мы могли бы как угодно увеличить число задач, решение которых приводится к подобной операции. К ней приводит задача о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Естественно, что эта операция получила в математике специальное название. Она называется операцией *дифференцирования функции*. Результат ее называется *производной*.

Итак, *производной от функции f, заданной на некотором интервале (a, b), в точке x этого интервала, называется предел, к которому стремится отношение приращения функции f в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.* Производную принято обозначать так*):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$. Удобство того или иного из них читатель впоследствии оценит сам.

Результаты рассмотренных примеров теперь можно сформулировать так:

Скорость в момент t движущейся по числовой прямой точки, координата которой s есть функция $s = f(t)$ от времени t, равна производной от этой функции $s' = f'(t)$.

Тангенс угла α между касательной к кривой, описываемой функцией $y = f(x)$, в точке, имеющей абсциссу x, и положительным направлением оси x равен производной $f'(x)$.

Сила тока I в проводе в момент t, если функция $Q = f(t)$ выражает количество электричества, прошедшее за время t через сечение провода, равна производной $I = Q' = f'(t)$.

Некоторые формулы. При натуральном $n = 1, 2, \ldots$

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

---

*) Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где рассматриваются только $\Delta x > 0$ или только $\Delta x < 0$, называется соответственно *правой* или *левой* производной от f в точке x. Про функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, принято говорить, что она имеет на этом отрезке производную, если она имеет производную в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b.

В самом деле, считая $\Delta x = h$, будем иметь

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}\right]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (x+h)^{n-1} + \lim_{h\to 0} (x+h)^{n-2}x + \ldots + \lim_{h\to 0} x^{n-1} = nx^{n-1},$$

где мы снова пользуемся элементарными свойствами пределов, которые будут обоснованы в дальнейшем (см. ниже замечание).

Справедливы также формулы:

$$(\sin ax)' = a\cos ax, \tag{2}$$
$$(\cos ax)' = -a\sin ax, \tag{3}$$

где a — константа. Докажем первое равенство, доказательство второго предоставляем читателю. При $a \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin a(x+h) - \sin ax}{h} = \lim_{h\to 0}\left[a\,\frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}}\cos\left(ax + \frac{h}{2}\right)\right] =$$
$$= a\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2}} \lim_{h\to 0}\cos\left(ax + \frac{h}{2}\right) = a\cdot 1\cdot\cos ax = a\cos ax.$$

Мы воспользовались свойством $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ и тем фактом, что функция $\cos x$ непрерывна. Оба эти утверждения будут обоснованы далее (см. § 4.2 и 4.9). При $a = 0$ равенства (2) и (3) выражают, что производная от постоянной равна нулю (см. ниже (4)).

Производная от функции $f(x)$ есть в свою очередь функция $f'(x)$. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается так: $f''(x)$.

Подобным же образом определяются *высшие производные* $f^{(n)}(x)$ от $f(x)$ порядка n, где n — любое натуральное число.

Вторая производная от функции $s = f(t)$, выражающей закон движения точки на прямой, равна, очевидно, ускорению этой точки в момент времени t.

Уже из сказанного видно, что понятие производной имеет громадное значение в прикладных вопросах, но оно является фундаментальным и в самой математике. Это будет видно из дальнейшего.

Отметим, что *постоянное число* C, рассматриваемое как функция от x (см. § 1.3), *имеет производную, равную нулю тождественно* (т. е. равную нулю для всех x). В самом деле,

$$f(x) = C,\ f(x+\Delta x) = C,\ C' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0. \tag{4}$$

Обратное утверждение также верно: *если про функцию известно, что ее производная равна нулю тождественно, $f'(x) \equiv 0$, то она есть постоянная.* Это простое утверждение, чтобы его доказать строго математически, требует уже достаточно серьезного аппарата, с которым мы познакомимся позднее (см. § 5.8). С другой стороны, из механических соображений оно совершенно очевидно. В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость тождественно равна нулю: $v = f'(t) \equiv 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s ее до начальной точки O равно постоянной при любом t. Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t, не имеет значения — время тоже можно обозначить через x.

Отметим еще, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производную и A, B — постоянные числа, то функция

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \tag{5}$$

также имеет производную, равную

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \tag{6}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{Au(x+h)+Bv(x+h)-[Au(x)+Bv(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\left(A\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(B\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) = \\ &= A\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + B\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = Au'(x) + Bv'(x).\end{aligned} \tag{7}$$

Во втором равенстве в этой цепочке равенств мы воспользовались тем фактом, что предел суммы равен сумме пределов, и в третьем,— что постоянную законно вынести за знак предела.

По индукции можно доказать более общее утверждение *):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j'(x),$$

где a_j — постоянные числа, а про функции $u_j(x)$ предполагается, что они имеют производные.

В частности, получим производную от многочлена:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(a_k — постоянные).

*) Надо иметь в виду обозначение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{1}^{n} \alpha_j.$$

Замечание. Формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно доказать по индукции. При $n = 1$ имеем

$$x' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 = x^0.$$

Если теперь допустить, что формула $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ верна, то получим (см. § 5.1 (5))

$$(x^n)' = (xx^{n-1})' = x'x^{n-1} + x(x^{n-1})' = nx^{n-1}.$$

Отметим формулы (4)—(9) § 5.1 и таблицу § 5.5, которые могут оказаться полезными читателю еще до того как он дойдет до них, изучая предмет систематически.

§ 1.6. Первообразная. Неопределенный интеграл

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная функция f. По определению функция F называется *первообразной функцией* для f на интервале (a, b) *), если на нем производная от F равна f:

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Очевидно, что если функция F есть первообразная для f на (a, b), а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f, потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b), то они необходимо отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Но тогда, как отмечалось в предыдущем параграфе, существует такое (постоянное) число C, что $F_1(x) - F(x) = C$, на (a, b). Отсюда следует (1).

Итак, мы установили, правда, пользуясь механическими соображениями, важный факт: если F есть *какая-либо первообразная от f на интервале (a, b), то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.*

Дадим теперь следующее определение:

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется произвольная ее первообразная

*) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$. Надо принять во внимание только сноску на стр. 33.