Замечание. Формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно доказать по индукции. При $n = 1$ имеем

$$x' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1 = x^0.$$

Если теперь допустить, что формула $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ верна, то получим (см. § 5.1 (5))

$$(x^n)' = (xx^{n-1})' = x'x^{n-1} + x(x^{n-1})' = nx^{n-1}.$$

Отметим формулы (4)—(9) § 5.1 и таблицу § 5.5, которые могут оказаться полезными читателю еще до того как он дойдет до них, изучая предмет систематически.

§ 1.6. Первообразная. Неопределенный интеграл

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная функция f. По определению функция F называется *первообразной функцией* для f на интервале (a, b) *), если на нем производная от F равна f:

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Очевидно, что если функция F есть первообразная для f на (a, b), а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f, потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b), то они необходимо отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Но тогда, как отмечалось в предыдущем параграфе, существует такое (постоянное) число C, что $F_1(x) - F(x) = C$, на (a, b). Отсюда следует (1).

Итак, мы установили, правда, пользуясь механическими соображениями, важный факт: если F есть *какая-либо первообразная от f на интервале (a, b), то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.*

Дадим теперь следующее определение:

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется произвольная ее первообразная

---

*) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$. Надо принять во внимание только сноску на стр. 33.

функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x)dx.$$

Из сказанного следует, что если F *есть некоторая определенная первообразная функция для f на интервале (a, b), то неопределенный интеграл от f на этом интервале равен*

$$\int f\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

где C — соответствующим образом подобранная постоянная.

Если f_1, f_2 — непрерывные на интервале (a, b) функции и A_1, A_2 — постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x))dx = A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + C, \tag{3}$$

где C есть некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в (3) стоит какая-то одна из первообразных функций от $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$(A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx)' =$$
$$= A_1(\int f_1(x)dx)' + A_2(\int f_2(x)dx)' = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x), \tag{4}$$

потому что интегралы $\int f_1\,dx$, $\int f_2\,dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные функции от f_1 и f_2. Поэтому правая часть (3) без последнего члена C есть также первообразная для $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$, но тогда она отличается от левой части (3) на некоторую постоянную.

Свойство (3) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на (a, b) функций $f_1, \ldots, f_n$ и постоянных $A_1, \ldots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} A_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \int f_j(x)\,dx + C. \tag{5}$$

Как следствие при $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ вытекает равенство

$$\int (f_1 \pm f_2)\,dx = \int f_1\,dx \pm \int f_2\,dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0$, $f_1 = f$ — равенство

$$\int Af\,dx = A \int f\,dx + C.$$

Примеры.

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \quad a \neq 0, \tag{7}$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \quad a \neq 0. \tag{8}$$

В самом деле (см. 1.5 (1), (2), (3)),

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}(x^n)' = x^{n-1},$$

$$\left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a}a\cos ax = \cos ax,$$

$$-\left(\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = \sin ax.$$

Из (5) и (6) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x)\,dx = \sum_0^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

§ 1.7. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной фигуры

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изобразим на рис. 1.14. Поставим задачу: требуется разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$ и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

выберем на каждом из полученных частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

по произвольной точке $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей затушеванных прямоугольников (см. рис. 1.14).

Будем теперь стремить все Δx_j к нулю и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способов разбиения (1) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то естественно величину S называть *площадью нашей криволинейной фигуры*.