В самом деле (см. 1.5 (1), (2), (3)),

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}(x^n)' = x^{n-1},$$

$$\left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a}a\cos ax = \cos ax,$$

$$-\left(\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = \sin ax.$$

Из (5) и (6) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x)\,dx = \sum_0^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

§ 1.7. Понятие определенного интеграла. Площадь криволинейной фигуры

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изобразим на рис. 1.14. Поставим задачу: требуется разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x, прямыми $x = a$ и $x = b$ и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

выберем на каждом из полученных частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

по произвольной точке $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей затушеванных прямоугольников (см. рис. 1.14).

Будем теперь стремить все Δx_j к нулю и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способов разбиения (1) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то естественно величину S называть *площадью нашей криволинейной фигуры.*

Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} f(\xi_j)\, \Delta x_j. \qquad (4)$$

Итак, мы дали определение площади нашей криволинейной фигуры. Возникает вопрос, имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n, когда $\max \Delta x_j \to 0$? В дальнейшем будет доказано, что этот вопрос решается положительно: каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле сделанного определения, выражаемую, таким образом, зависящим от этой фигуры числом S.

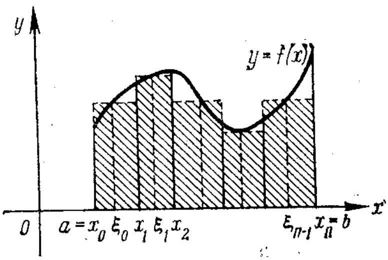

Рис. 1.14.

Другой возникающий здесь вопрос, насколько естественно данное определение площади, как всегда в таких случаях, решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение. У нас будет много случаев убедиться в правильности сделанного определения.

Но обратим внимание на выражение (4). Отвлекаясь от задачи нахождения площади, мы можем на него смотреть как на некоторую операцию, при помощи которой по данной функции f, заданной на $[a, b]$, определяется число S. Она называется *операцией интегрирования* функции f на (конечном) отрезке $[a, b]$, а результат ее, если он существует, называется *определенным интегралом* от f на $[a, b]$ и записывается так:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\, \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (5)$$

Итак, по определению *определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы* (4), *когда максимальный частичный отрезок разбиения* (1) *стремится к нулю.*

В этом определении, которое теперь уже не связано с задачей о нахождении площади, функция f не обязательно непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Надо отметить, что это определение не утверждает существования определенного интеграла для всякой функции f, заданной на $[a, b]$, т. е. существования предела (5). Оно только говорит, что если этот предел существует для заданной на $[a, b]$ функции f, то он называется определенным интегралом от f на $[a, b]$.

Следует иметь в виду также, что когда говорят, что указанный предел S существует, то подразумевают, что он не зависит от способов разбиения отрезка $[a, b]$ на части и выбора на полученных частичных отрезках точек ξ_j. Например, если известно, что определенный интеграл $S = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ от некоторой функции f на отрезке $[0, 1]$ существует, то он может быть получен, например, при помощи отыскания предела $S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)$ интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_j = j/n$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и выбору в качестве ξ_j левых концов частичных отрезков разбиения.

Но число S может быть получено так же как предел

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\left(\frac{j+1}{n}\right)^2\right)\left[\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]$$

интегральных сумм, соответствующих разбиению $[0, 1]$ точками $x_j = (j/n)^2$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ и выбору в качестве ξ_j правых концов частичных отрезков разбиения. В этом случае длина j-го частичного отрезка удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \frac{2j+1}{n^2} \leqslant \frac{2(n-1)+1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0$$
$$(n\to\infty),$$

показывающим, что максимальный из них (самый правый) имеет длину, стремящуюся к нулю вместе с неограниченным возрастанием n.

В теории определенного интеграла доказывается, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т. е. для нее предел (5) существует. Отсюда и следует упомянутый факт, что всякая фигура рассмотренного выше типа имеет площадь.

Пример. Площадь S (рис. 1.15), ограниченная параболой $y = x^2$, осью x и прямой $x = 1$, равна

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_0^{n-1} k^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\,\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Мы показали, что интегральная сумма функции $y = x^2$, соответствующая разбиению $[0, 1]$ на равные части, стремится к числу 1/3.

Тот факт, что сумма $\sum_{0}^{n-1}(x_j)^2\Delta x_j$, соответствующая произвольному разбиению $[0, 1]$, стремится к $1/3$, когда $\max\Delta x_j \to 0$ непосредственно доказать элементарными методами не так уж просто. Это, однако, следует из упомянутого утверждения, что определенный интеграл от непрерывной на (конечном) отрезке функции всегда существует.

Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — абсциссы движущейся точки. Работа силы F при передвижении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx,$$

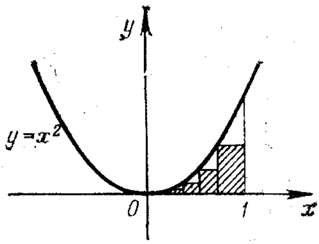

Рис. 1.15.

где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности f произведение $f(x_j)\Delta x_j$ близко к истинной работе на $[x_j, x_{j+1}]$, а сумма этих произведений близка к истинной работе на $[a, b]$ и притом тем ближе, чем меньше $\max\limits_j \Delta x_j$.

Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a, b]$ оси x имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geqslant 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Общая масса этого отрезка равна интегралу

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\,dx, \tag{6}$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j.$$

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (5) связано с трудностями — интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую не легко преобразовывать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решали задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного итеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Пусть задана непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ есть ее первообразная. Теорема Ньютона и Лейбница утверждает справедливость равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{7}$$

показывающего, что если для функции f известна ее первообразная F, то вычисление определенного интеграла от f на $[a, b]$ сводится к простой подстановке чисел a и b в F.

Эта теорема будет доказана в § 9.9, а сейчас мы дадим ее простое механическое толкование. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения по прямой точки, т. е. y есть расстояние с соответствующим знаком в момент x движущейся точки до закрепленной нулевой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $a \leqslant x \leqslant b$, очевидно, равен *)

$$\Lambda = F(b) - F(a). \tag{8}$$

С другой стороны, он может быть вычислен интегрированием скорости $f(x) = F'(x)$ точки:

$$\Lambda = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{9}$$

Ведь произведение $f(x_j)\Delta x_j$ приближенно выражает путь, пройденный точкой на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$, где x_j определены как в (1). Но тогда из (8) и (9) следует (7).

Примеры.
$$\int_a^b x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}\Bigg|_a^b = \frac{1}{n}(b^n - a^n) \qquad (n \neq 0),$$

$$\int_a^b \cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\Bigg|_a^b = \frac{1}{\alpha}(\sin\alpha b - \sin\alpha a), \qquad \alpha \neq 0.$$

При этом мы считаем, что $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Количество подобных примеров можно значительно увеличить после того, как читатель познакомится с §§ 5.1—5.5, где изложены основы техники дифференцирования элементарных функций.

*) Впрочем, термин «путь, пройденный точкой», не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь Λ_1, а затем влево, пройдя путь Λ_2, то $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$.