Глава 2

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

§ 2.1. Рациональные и иррациональные числа

В этой главе мы даем обзор основных свойств (аксиом) действительного числа. Это уместно, потому что среди этих свойств имеются такие, с которыми мы не имели дела в арифметике и школьном курсе алгебры, где рассматриваются операции над постоянными числами. Между тем эти свойства обнаруживаются при рассмотрении *переменных чисел* или, как говорят по традиции,— *переменных величин.*

При изучении функций приходится привлекать свойства чисел во всей их полноте помимо тех свойств, с которыми мы хорошо знакомы из школьной математики.

Целые числа:

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

можно складывать, вычитать и умножать друг на друга, получая снова целые числа.

Рациональные числа будем записывать в виде $\pm p/q$ $(+p/q = p/q)$, где p и q целые, $p \geqslant 0$ (p больше или равно нулю) и $q > 0$. Таким образом, если это не оговорено, в выражении p/q мы считаем p и q неотрицательными. Два рациональных числа $\pm p_1/q_1$ и $\pm p_2/q_2$ считаются равными в том и только в том случае, если они имеют одинаковый знак и если $p_1q_2 = q_1p_2$. Выражение $\pm 0/q$ определяет одно и то же число 0 независимо от знака («+» или «−») и числа q. Два неотрицательных числа, p_1/q_1 и p_2/q_2, находятся в отношении

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2},$$

если $p_1q_2 < q_1p_2$. Хорошо известно, как сравниваются рациональные числа с произвольными знаками и как определяются четыре арифметических действия над ними. Нет необходимости это напоминать*).

В практических вычислениях вполне достаточно оперировать только рациональными числами. Однако числа нужны еще для

*) Мы считаем, что читателю известны из школьного курса основные свойства рациональных чисел и только повторяем некоторые из них без доказательства.

целей измерения геометрических и физических величин (длин отрезков, площадей, объемов, температур и т. д.). Мы здесь имеем в виду не практическое приближенное измерение этих величин, а точное (теоретическое) выражение их числами. Для этих целей рациональных чисел уже недостаточно. Рассмотрим, например, отрезок, представляющий собой гипотенузу прямоугольного треугольника с равными катетами длины единица. Если допустить, что длина этого отрезка выражается положительной рациональной дробью p/q, которую будем считать несократимой, то площадь построенного на нем квадрата равна p^2/q^2, а площадь каждого из квадратов, построенных на катетах, равна 1. Тогда в силу теоремы Пифагора получим равенство $p^2 = 2q^2$. Правая его часть есть целое число, делящееся на 2, но тогда левая должна быть четной, а вместе с ней и p. Отсюда следует, что левая часть делится на 4, но тогда q^2 делится на 2, откуда также q делится на 2. Итак, p и q имеют общий множитель 2, что противоречит предположению, что дробь p/q взята несократимой. Таким образом, имеются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Их называют *несоизмеримыми с единицей*. Чтобы выразить их длины *), появилась необходимость в новых числах, называемых *иррациональными*. Так возникло число $\sqrt{2}$, выражающее длину гипотенузы рассмотренного треугольника.

Существуют различные способы введения иррациональных чисел. Покажем, как можно ввести их при помощи бесконечных десятичных дробей.

Зададим произвольное положительное рациональное число p/q. Превратим его по известным правилам арифметики в десятичную дробь. В результате получим

$$\begin{array}{l|l} p & \;q \\ \cline{2-2} \underline{\beta_0} & \alpha_0,\, \alpha_1\alpha_2\ldots \\ \;\;\underline{\beta_1} & \\ \;\;\;\ldots & \end{array} \tag{2}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — цифры.

Будем писать

$$p/q = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots = +\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots \tag{3}$$

и называть десятичную дробь в правой части (3) *десятичным разложением числа p/q*.

Легко показать, что десятичное разложение положительного рационального числа не зависит от способа задания последнего, иначе говоря, при замене в (2) p и q соответственно на p_1, q_1,

*) A priori длина и положительное число — разные понятия, но между ними имеется тесная связь, называемая изоморфизмом (см. далее § 2.7).

где $pq_1 = p_1q$, получается в точности то же десятичное разложение $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$.

Будем считать, что дробь p/q несократимая.

Хорошо известно, что если знаменатель дроби p/q имеет вид $q = 2^s5^l$, где s и l — неотрицательные целые числа, то ее десятичное разложение есть *конечная десятичная дробь*

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \tag{4}$$

которая, в частности, может оказаться натуральным числом ($p/q = \alpha_0$). Если формально приписать справа к этой десятичной дроби бесконечно много нулей, то она превращается в бесконечную десятичную дробь:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m 000 \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m (0). \tag{5}$$

Мы называем ее периодической десятичной дробью с периодом 0, потому что в ней цифра 0 периодически повторяется.

Пользуются также и другим представлением конечной десятичной дроби (4) в виде периодической десятичной дроби с периодом 9:

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)99 \ldots =$$
$$= \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)(9) \quad (\alpha_m > 0), \tag{6}$$

хотя оно и не возникает в процессе (2).

Пусть теперь знаменатель положительной дроби p/q не имеет вид 2^s5^l. Тогда процесс (2) бесконечный — на любом его шаге возникает положительный остаток. Каждый остаток меньше q, и потому после того, как цифры числа p снесены, среди первых q остатков окажется по крайней мере два равных между собой. Но как только возникает остаток, который уже был прежде, процесс становится повторяющимся — *периодическим*. Поэтому десятичное разложение произвольного положительного рационального числа p/q имеет вид

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ \ldots \ \alpha_m\gamma_1 \ldots \gamma_s\gamma_1 \ldots \gamma_s \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m (\gamma_1 \ldots \gamma_s). \tag{7}$$

Разложения (5) или (6) можно рассматривать как частные случаи (7). Разложение вида (7) называется положительной десятичной периодической дробью с периодом, представляющим собой группу цифр $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_s$.

Ниже приводятся частные примеры положительных бесконечных десятичных периодических дробей:

$$\frac{1}{6}=0,166\ldots=0,1\,(6),\qquad \frac{1}{7}=0,(142857),$$

$$\frac{2}{9}=0,22\ldots=0,(2),\qquad \frac{7}{99}=0,0707\ldots=0,(07),$$

$$\frac{17}{999}=0,017017\ldots=0,(017),\qquad \frac{7}{990}=0,0070707\ldots=0,0\,(07).$$

В первом примере периодом является цифра 6, во втором — группа цифр 142857, в четвертом — группа цифр 07.

У положительной десятичной дроби хотя бы одно из чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ не равно нулю.

Итак, *каждому положительному рациональному числу p/q при помощи процесса* (2) *ставится в соответствие положительная десятичная периодическая дробь с периодом, отличным от* 9 *).

При других вычислениях могут получаться десятичные дроби с периодом 9, но при желании их затем можно записать через соответствующие им конечные десятичные дроби или, что все равно, десятичные дроби с периодом 0.

Верно и обратное утверждение: *каждая положительная десятичная периодическая дробь, если она не имеет период* 9, *может быть получена при помощи процесса* (2) *из некоторой обыкновенной положительной дроби p/q (единственной).*

Например, если дробь 103/330 подвергнуть процессу (2), то получим десятичную периодическую дробь $\frac{103}{330}=0,3\,(12)$. Обратно, эта последняя превращается в исходную дробь при помощи равенств

$$0,3\,(12)=\frac{3,(12)}{10}=\frac{3+0,(12)}{10}=\frac{3}{10}+\frac{12}{99\cdot 10}=\frac{309}{990}=\frac{103}{330}.$$

Отрицательному рациональному числу $-p/q$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение числа p/q, взятое со знаком «$-$».

Итак, имеется взаимно однозначное соответствие **) $\pm p/q = \pm\,\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ между не равными нулю рациональными числами и бесконечными десятичными не равными нулю периодическими дробями. Каждому не равному нулю рациональному

---

*) Если допустить, что процесс (2) привел к десятичной дроби с периодом 9, то, начиная с некоторого этапа процесса, остатки γ_k, γ_{k+1} равны между собой, а в частном получаются цифры 9. Но тогда $10\gamma_k = 9q + \gamma_{k+1}$, и так как $\gamma_k = \gamma_{k+1}$, то $\gamma_k = q$. Но этого не может быть, так как $\gamma_k < q$.

**) Если каждому элементу x множества A соответствует определенный элемент y множества B так, что любой элемент $y \in B$ соответствует одному и только одному $x \in A$, то говорят, что этим установлено одно-однозначное или взаимно однозначное соответствие ($x \rightleftarrows y$).

числу соответствует при помощи указанного выше процесса одно и только одно его десятичное бесконечное периодическое разложение, не имеющее периода 9. Обратно, любое такое разложение соответствует при помощи указанного процесса некоторому не равному нулю рациональному числу (единственному).

Числу нуль (оно тоже рациональное) *естественно привести в соответствие разложение* $0 = \pm 0{,}00\ldots = 0{,}00\ldots$

Кроме периодических десятичных дробей существуют непериодические, например, $0{,}1010010001\ldots$; $0{,}121122111222\ldots$

Вот еще пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим определенную бесконечную непериодическую десятичную дробь $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$ Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k k-го разряда числа $\sqrt{2}$, однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π, с любой наперед заданной точностью. Это приводит к вполне определенному бесконечному десятичному разложению π, которое, как оказывается, не является периодическим.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом называется произвольная бесконечная непериодическая дробь*

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \tag{8}$$

где α_0 — целое неотрицательное число, а α_k ($k = 1, 2, \ldots$) — цифры, знак же равенства «=» выражает, что мы обозначили правую часть (8) *через a.* Впрочем, удобно говорить, что правая часть (8) есть десятичное разложение числа a.

Рациональное и иррациональные числа называются действительными (или вещественными) числами.

Из сказанного следует, что *всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби* (8). *Если оно рационально, то его десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае согласно нашему определению выражение* (8) *само определяет иррациональное число.*

Число a, где не все α_k равны нулю, называется положительным или отрицательным в зависимости от того, будет ли в (8) фигурировать «+» или «−»; при этом, как обычно, «+» будем позволять себе опускать.

Действительные числа определены пока формально, надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие «>» и проверить, что эти операции и понятие «>» согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием «>» для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

Определение понятия «$>$» дается в § 2.2, а определения арифметических операций в § 2.3. В § 2.4 формулируются и доказываются основные свойства числа, распределенные на пять групп I—V. Первые три группы содержат известные свойства, которыми мы руководствуемся при арифметических вычислениях и решениях неравенств. Группа IV составляет одно свойство (*Архимеда*). Наконец, группа V также состоит из одного свойства: существования предела у неубывающей ограниченной последовательности. В сущности, для дальнейшего нам будет важно только знать, что действительные числа (десятичные дроби) суть объекты, для которых определены понятие «$>$» и арифметические операции, удовлетворяющие свойствам I—V. Поэтому может быть и такой способ чтения книги, когда читатель систематически читает крупный шрифт, только более или менее ознакомившись с мелким шрифтом, где даются доказательства свойств I—V.

Из свойств I—V можно получить логически все остальные свойства числа.

Существует аксиоматический подход к определению действительного числа, заключающийся в том, что числами называются некоторые объекты (вещи) a, b, c, ..., *удовлетворяющие свойствам* I—V. *При таком подходе свойства* I—V *называются аксиомами числа.*

Аксиоматическое построение понятия числа на первый взгляд может показаться более простым. Однако здесь возникает вопрос, совместны ли аксиомы I—V? Чтобы доказать их совместность, появляется необходимость построить формальные символы, для которых можно определить арифметические операции и понятие «$>$» и проверить, что они удовлетворяют аксиомам I—V. Такими символами как раз и могут служить бесконечные десятичные дроби.

§ 2.2. Определение неравенства

Зададим два числа $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \ldots$, $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$, определяемых бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода 9 *). Будем считать, что они равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для положительных a и b по определению, $a < b$ или, что все равно, $b > a$, если $\alpha_0 < \beta_0$, или, если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l, что $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, l)$ и $\alpha_{l+1} < \beta_{l+1}$.

*) Если число задано десятичной дробью с периодом 9, то его всегда можно записать также в виде десятичной дроби с периодом 0.