Определение понятия «$>$» дается в § 2.2, а определения арифметических операций в § 2.3. В § 2.4 формулируются и доказываются основные свойства числа, распределенные на пять групп I—V. Первые три группы содержат известные свойства, которыми мы руководствуемся при арифметических вычислениях и решениях неравенств. Группа IV составляет одно свойство (*Архимеда*). Наконец, группа V также состоит из одного свойства: существования предела у неубывающей ограниченной последовательности. В сущности, для дальнейшего нам будет важно только знать, что действительные числа (десятичные дроби) суть объекты, для которых определены понятие «$>$» и арифметические операции, удовлетворяющие свойствам I—V. Поэтому может быть и такой способ чтения книги, когда читатель систематически читает крупный шрифт, только более или менее ознакомившись с мелким шрифтом, где даются доказательства свойств I—V.

Из свойств I—V можно получить логически все остальные свойства числа.

Существует аксиоматический подход к определению действительного числа, заключающийся в том, что числами называются некоторые объекты (вещи) a, b, c, ..., *удовлетворяющие свойствам* I—V. *При таком подходе свойства* I—V *называются аксиомами числа.*

Аксиоматическое построение понятия числа на первый взгляд может показаться более простым. Однако здесь возникает вопрос, совместны ли аксиомы I—V? Чтобы доказать их совместность, появляется необходимость построить формальные символы, для которых можно определить арифметические операции и понятие «$>$» и проверить, что они удовлетворяют аксиомам I—V. Такими символами как раз и могут служить бесконечные десятичные дроби.

§ 2.2. Определение неравенства

Зададим два числа $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \ldots$, $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\ldots$, определяемых бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода 9*). Будем считать, что они равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для положительных a и b по определению, $a < b$ или, что все равно, $b > a$, если $\alpha_0 < \beta_0$, или, если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l, что $\alpha_k = \beta_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, l$) и $\alpha_{l+1} < \beta_{l+1}$.

*) Если число задано десятичной дробью с периодом 9, то его всегда можно записать также в виде десятичной дроби с периодом 0.

По определению, $a > 0$ или $a < 0$ в зависимости от того, будет ли a положительным или отрицательным, далее по определению, $a < b$, если $a < 0$, $b > 0$, или если a, $b < 0$ и $|a| > |b|$.

Если $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то, по определению, $-a = \mp\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ и абсолютная величина $|a| = +\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$. Таким образом,

$$|-a| = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a \leqslant 0). \end{cases}$$

Приведенные определения согласованы с соответствующими определениями для рациональных чисел.

§ 2.3. Определение арифметических действий

Пусть каждому неотрицательному целому числу (индексу) n в силу некоторого закона приведено в соответствие число x_n. Совокупность

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots \tag{1}$$

называется *последовательностью* (чисел). Отдельные числа x_n последовательности (1) называются ее *элементами*. Элементы x_n и x_m при $m \neq n$ считаются отличными как элементы данной последовательности, хотя как числа они могут быть равны между собой, т. е. может быть $x_n = x_m$. *Последовательность* называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $x_k \leqslant x_{k+1}$ ($x_k \geqslant x_{k+1}$) для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Будем говорить, что *последовательность* (1) *ограничена сверху* (*числом* M), если существует целое число M такое, что $x_k \leqslant M$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Если числа x_k последовательности (1) целые, то будем говорить, что она *стабилизируется* к числу ξ, если найдется такое k_0, что $x_k = \xi$ для всех $k > k_0$.

Очевидно, что *если последовательность целых чисел не убывает и ограничена сверху числом M, то она стабилизируется к некоторому целому числу $\xi \leqslant M$.*

Рассмотрим теперь последовательность неотрицательных десятичных дробей

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots, \\ a_2 = \alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots, \\ a_3 = \alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{2}$$

Правые части в (2) образуют таблицу (*бесконечную матрицу*).

Будем говорить, что *последовательность* (2) *стабилизируется к числу* $a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, *и писать*

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$