По определению, $a > 0$ или $a < 0$ в зависимости от того, будет ли a положительным или отрицательным, далее по определению, $a < b$, если $a < 0$, $b > 0$, или если $a, b < 0$ и $|a| > |b|$.

Если $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то, по определению, $-a = \mp\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ и абсолютная величина $|a| = +\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$. Таким образом,

$$|-a| = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a \leqslant 0). \end{cases}$$

Приведенные определения согласованы с соответствующими определениями для рациональных чисел.

§ 2.3. Определение арифметических действий

Пусть каждому неотрицательному целому числу (индексу) n в силу некоторого закона приведено в соответствие число x_n. Совокупность

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \tag{1}$$

называется *последовательностью* (чисел). Отдельные числа x_n последовательности (1) называются ее *элементами*. Элементы x_n и x_m при $m \neq n$ считаются отличными как элементы данной последовательности, хотя как числа они могут быть равны между собой, т. е. может быть $x_n = x_m$. *Последовательность* называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $x_k \leqslant x_{k+1}$ ($x_k \geqslant x_{k+1}$) для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Будем говорить, что *последовательность* (1) *ограничена сверху* (*числом* M), если существует целое число M такое, что $x_k \leqslant M$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

Если числа x_k последовательности (1) целые, то будем говорить, что она *стабилизируется* к числу ξ, если найдется такое k_0, что $x_k = \xi$ для всех $k > k_0$.

Очевидно, что *если последовательность целых чисел не убывает и ограничена сверху числом M, то она стабилизируется к некоторому целому числу $\xi \leqslant M$.*

Рассмотрим теперь последовательность неотрицательных десятичных дробей

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots, \\ a_2 &= \alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots, \\ a_3 &= \alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Правые части в (2) образуют таблицу (*бесконечную матрицу*).

Будем говорить, что *последовательность* (2) *стабилизируется к числу* $a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, *и писать*

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$

если k-й столбец таблицы (2) стабилизируется к γ_k, каково бы ни было $k = 0, 1, 2, \ldots$. При этом, очевидно, автоматически оказывается, что γ_0 — целое неотрицательное, а γ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — цифры.

Замечание. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где

$$a_{2k} = 1,\ \underbrace{0 \ldots 0}_{k \text{ раз}} 11 \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$a_{2k+1} = 0,\ \underbrace{9 \ldots 9}_{k \text{ раз}} \ldots \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

не стабилизируется. Из § 3.1, где вводится понятие предела, будет ясно, что данная последовательность имеет предел, равный 1 ($a_n \to 1$). Итак, последовательность десятичных дробей может иметь предел и в то же время не стабилизироваться. Однако из того, что $a_n \rightrightarrows a$, следует, что $a_n \to a$ (см. § 3.1).

Для произвольного числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ введем его *n-ю срезку* $a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$, представляющую собой конечную десятичную дробь. Мы считаем, что операции с конечными десятичными дробями читателю известны из курса арифметики.

Зададим положительные числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$, разложенные в бесконечные десятичные дроби.

Введем последовательность чисел

$$a^{(n)} + b^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n = \lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_n^{(n)} \tag{4}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Ниже будет доказана лемма, из которой будет следовать, что эта последовательность стабилизируется к некоторому определенному числу $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$. Его естественно назвать *суммой чисел a и b* и писать $a + b = \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots$

Итак, мы определяем сумму $a + b$ как число, для которого

$$a^{(n)} + b^{(n)} \rightrightarrows a + b. \tag{5}$$

Произведение, разность и частное чисел a и b определяем следующим образом:

$$\left(a^{(n)} b^{(n)}\right)^{(n)} \rightrightarrows ab, \tag{6}$$

$$a^{(n)} - \left(b^{(n)} + 10^{-n}\right) \rightrightarrows a - b \quad (a > b > 0)^{*}), \tag{7}$$

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \rightrightarrows \frac{a}{b}. \tag{8}$$

Выражения слева в (5) — (8) не убывают при возрастании n: благодаря этому и ограниченности их сверху они на основании

*) $n > n_0$, где n_0 настолько велико, что разность слева в (7) положительна. Отметим, что равенство $(a - b) + b = a (a > b > 0)$ доказывается в § 2.8 после (4), а равенство $a \cdot \frac{1}{a} = 1 (a > 0)$ доказывается на основании § 2.8 (12).

доказываемой ниже леммы стабилизируются к определённым числам, которые обозначаются соответственно через ab, $a-b$, a/b. Надо иметь в виду, что $a^{(n)}$ не убывает при неограниченном возрастании n, а $b^{(n)}+10^{-n}$ не возрастает; кроме того, имеют место неравенства

$$\left(a^{(n)}b^{(n)}\right)^{(n)} \leqslant (\alpha_0+1)(\beta_0+1),\quad a^{(n)}-\left(b^{(n)}+10^{-n}\right) \leqslant (\alpha_0+1),$$
$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)} \leqslant \frac{\alpha_0+1}{\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_s}$$

(где s такое, что $\beta_s>0$), показывающие, что левые их части ограничены.

Положим еще

$$0+a=a\pm 0=a,\quad a\cdot 0=0\cdot a=a-a=\frac{0}{b}=0\quad (a\geqslant 0, b>0). \tag{9}$$

Мы определили для неотрицательных чисел a, b их сумму, разность, произведение и частное, предполагая в случае разности, что $a\geqslant b$, и частного, что $b>0$. Эти определения распространяются обычными способами на числа a и b произвольных знаков. Например, если a, $b\leqslant 0$, то полагаем $a+b=b+a=-(|a|+|b|)$. Если же a и b — числа разных знаков и $|a|\geqslant|b|$, то полагаем $a+b=b+a=\pm||a|-|b||$, где выбирается знак, одинаковый со знаком a. В частности, имеет место

$$a+(-a)=0 \tag{10}$$

для любого a.

Подобные правила можно было бы привести для остальных арифметических действий, но в этом нет необходимости — они хорошо известны из школьного курса алгебры.

Но, чтобы обосновать сказанное, нам предстоит доказать лемму:

Лемма 1. *Если неубывающая последовательность* (2) *конечных десятичных дробей* (*см.* § 2.2, (4) *и* (5)) *ограничена сверху целым числом M, то она стабилизируется к некоторому числу a, удовлетворяющему неравенствам*

$$a_n\leqslant a\leqslant M\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11}$$

В самом деле, в условиях леммы целые числа нулевого столбца матрицы (2) также не убывают и ограничены сверху числом M, поэтому они стабилизируются на некотором целом неотрицательном числе $\gamma_0\leqslant M$. Рассуждая теперь по индукции, допустим, что уже доказано, что столбцы матрицы (2) с номерами, не превышающими k, стабилизируются соответственно к γ_0, γ_1, ..., γ_k и

$$\gamma_0,\ \gamma_1\ \ldots\ \gamma_k\leqslant M\quad (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_k \text{ — цифры}). \tag{12}$$

Докажем, что $(k+1)$-й столбец в (2) также стабилизируется к некоторой цифре γ_{k+1} и имеет место неравенство

$$\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \gamma_{k+1} \leqslant M. \tag{13}$$

В самом деле, раз десятичные разложения чисел a_n при $n > n_1$ при достаточно большом n_1 имеют вид

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \alpha_{n,\,k+1} \alpha_{n,\,k+2} \ldots \leqslant M,$$

и, кроме того, a_n не убывает, то для указанных n цифры $\alpha_{n,\,k+1}$ $(\leqslant 9)$ не убывают, и следовательно, стабилизируются при $n \geqslant n_2$, где n_2 достаточно велико, к некоторой цифре γ_{k+1}. При этом $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{k+1} \leqslant a_n \leqslant M$ $(n \geqslant n_2)$, и мы доказали (13) и тот факт, что $a_n \underset{\rightarrow}{\rightarrow} a$. Так как a_n конечная десятичная дробь, то при некотором k для всех $s > k$ цифры $\alpha_{ns} = 0$ и $\alpha_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nk} \leqslant \leqslant \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \leqslant \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots = a$. Не может быть $a > M$. Иначе для некоторого k было бы $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k > M$, что противоречит (12).

§ 2.4. Основные свойства действительных чисел

I. Свойства порядка.

I_1. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

I_2. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$ (транзитивное свойство знака «$<$»).

I_3. Если $a < b$, то найдется такое число c, что $a < c < b$.

Свойства I_1 и I_2 вытекают непосредственно из определений знаков «$=$» и «$<$». Если положительные, не имеющие периода 9, числа $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$ записаны в виде бесконечных дробей и $a < b$, то при некотором s_0

$$\alpha_k = \beta_k, \; k \leqslant s_0 - 1 \text{ (если } s_0 = 0, \text{ то эти равенства опускаются)},$$
$$\alpha_{s_0} < \beta_{s_0}.$$

Найдется также $s_1 > s_0$ такое, что $\alpha_{s_1} < 9$. Если положить $c = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{s_1 - 1} (\alpha_{s_1} + 1)$, то, очевидно, c — конечная десятичная дробь, удовлетворяющая неравенствам $a < c < b$.

Распространение доказательства I_3 на случай любых a и b не представляет труда.

II. Свойства действий сложения и вычитания*).

II_1. $a + b = b + a$ (переместительное или коммутативное свойство).

---

*) При аксиоматическом подходе надо еще добавить: каждой паре чисел a, b в силу некоторого закона соответствует число $a + b$, называемое их суммой; при этом выполняются II_1 — II_5. II_3 и II_4 тогда надо видоизменить: существует число 0 (нуль) такое, что $a + 0 = a$ для всех a, так же как существует для каждого a число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$. Единствен-