Докажем, что $(k+1)$-й столбец в (2) также стабилизируется к некоторой цифре γ_{k+1} и имеет место неравенство

$$\gamma_0,\ \gamma_1 \ldots \gamma_k\gamma_{k+1} \leqslant M. \tag{13}$$

В самом деле, раз десятичные разложения чисел a_n при $n > n_1$ при достаточно большом n_1 имеют вид

$$a_n = \gamma_0,\ \gamma_1 \ldots \gamma_k\alpha_{n,\,k+1}\alpha_{n,\,k+2} \ldots \leqslant M,$$

и, кроме того, a_n не убывает, то для указанных n цифры $\alpha_{n,\,k+1}$ $(\leqslant 9)$ не убывают, и следовательно, стабилизируются при $n \geqslant n_2$, где n_2 достаточно велико, к некоторой цифре γ_{k+1}. При этом $\gamma_0,\ \gamma_1 \ldots \gamma_{k+1} \leqslant a_n \leqslant M$ $(n \geqslant n_2)$, и мы доказали (13) и тот факт, что $a_n \rightrightarrows a$. Так как a_n конечная десятичная дробь, то при некотором k для всех $s > k$ цифры $\alpha_{ns} = 0$ и $\alpha_n = \alpha_{n0},\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nk} \leqslant \leqslant \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \leqslant \gamma_0, \gamma_1\gamma_2 \ldots \equiv a$. Не может быть $a > M$. Иначе для некоторого k было бы $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k > M$, что противоречит (12).

§ 2.4. Основные свойства действительных чисел

I. Свойства порядка.

I_1. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

I_2. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$ (транзитивное свойство знака «<»).

I_3. Если $a < b$, то найдется такое число c, что $a < c < b$.

Свойства I_1 и I_2 вытекают непосредственно из определений знаков «=» и «<». Если положительные, не имеющие периода 9, числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$ записаны в виде бесконечных дробей и $a < b$, то при некотором s_0

$$\alpha_k = \beta_k,\ k \leqslant s_0 - 1 \ \text{(если } s_0 = 0, \text{ то эти равенства опускаются)},$$
$$\alpha_{s_0} < \beta_{s_0}.$$

Найдется также $s_1 > s_0$ такое, что $\alpha_{s_1} < 9$. Если положить $c = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{s_1-1}(\alpha_{s_1}+1)$, то, очевидно, c — конечная десятичная дробь, удовлетворяющая неравенствам $a < c < b$.

Распространение доказательства I_3 на случай любых a и b не представляет труда.

II. Свойства действий сложения и вычитания*).

II_1. $a + b = b + a$ (переместительное или коммутативное свойство).

---

*) При аксиоматическом подходе надо еще добавить: каждой паре чисел a, b в силу некоторого закона соответствует число $a + b$, называемое их суммой; при этом выполняются II_1 — II_5. II_3 и II_4 тогда надо видоизменить: существует число 0 (нуль) такое, что $a + 0 = a$ для всех a, так же как существует для каждого a число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$. Единствен-

II_2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

II_3. $a+0=a$.

II_4. $a+(-a)=0$.

II_5. Из $a<b$ следует, что $a+c<b+c$ для любого c.

Доказательство этих свойств достаточно привести для положительных чисел a, b, c. Тогда эти свойства автоматически переносятся на числа любого знака, как это хорошо известно из элементарной алгебры. Итак, пусть $a, b, c>0$.

Свойство II_1 следует на основании § 2.3, (5) из того, что оно верно для конечных дробей: $a^{(n)}+b^{(n)}=b^{(n)}+a^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Свойства II_3 и II_4 непосредственно вытекают из сделанных выше определений (см. § 2.3, (9) и (10)).

Доказательство II_2 см. в § 2.8. Свойство II_5 очевидно, когда a и b — конечные десятичные дроби. Пусть теперь a и b произвольны. Выберем конечную десятичную дробь d такую, что $a<d<b$. Тогда при достаточно больших n имеем $a^{(n)}<d<b^{(n)}$, и, так как все это конечные дроби, то $a^{(n)}+c<d+c<b^{(n)}+c$. С ростом n срезки $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$ не убывают, поэтому $a+c\leqslant d+c<b+c$, откуда $a+c<b+c$.

Равенство II_1 тривиально, если a или b равно нулю (см. § 2.3 (9)).

III. Свойства действий умножения и деления*).

III_1. $ab=ba$ (переместительное или коммутативное свойство).

III_2. $ab(c)=a(bc)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

III_3. $a\cdot 1=a$.

III_4. $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$.

III_5. $(a+b)c=ac+bc$ (распределительный или дистрибутивный закон).

ность нуля может быть выведена логически из рассматриваемых аксиом: допущение существования другого нуля $0'$ влечет, что $0'=0'+0=0+$ $+0'=0$. Выводится также из аксиом существование разности $a-b$, т. е. числа, которое надо добавить к b, чтобы получить a. Это число есть $a+(-b)$, потому что $a+(-b)+b=a+0=a$. Оно единственно, потому что если $b+c=b+c'$, то $c=(-b)+b+c=(-b)+b+c'=c'$.

*) При аксиоматическом подходе надо добавить: каждой паре a, b в силу определенного закона соответствует число ab, называемое произведением a и b. При этом выполняются свойства III_1 — III_6. Надо еще видоизменить III_3 и III_4: существует число 1 (единица), отличное от 0 и такое, что $a\cdot 1=a$ для всех a; существует для любого $a\neq 0$ число $1/a$ такое, что $a\cdot\frac{1}{a}=1$. Единственность единицы выводится логически из рассматриваемых аксиом так же, как существование и единственность частного a/b $(b\neq 0)$, т. е. числа, которое надо умножить на b, чтобы получить a. Вывод вполне аналогичен выводу в сноске к II, где 0 надо заменить на 1 и действие сложения на умножение. При этом автоматически $1>0$; ведь если допустить, что $1<0$, то (см. II_4, II_5) $0=1+(-1)<-1$ и (см. III_6) $1(-1)<0(-1)$, т. е. (см. III_3) $-1<0$, и мы получим противоречие: $-1<0<-1$. Надо учесть, что

$$0\cdot(-1)=0\cdot(-1)+0\cdot 1+0\cdot 1=0(-1+1+1)=0\cdot(0+1)=0\cdot 1=0.$$

III_6. Из $a < b$, $c > 0$ следует $ac < bc$.

По тем же соображениям, что и для свойств II, существенно проверить III в случае только положительных a, b, c (см. § 2.8).

IV. Архимедово свойство.

Каково бы ни было число $c > 0$, существует натуральное $n > c$. В самом деле, если $c = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, то можно взять $n = \alpha_0 + 2$.

Из архимедова свойства и некоторых предыдущих свойств следует, что, каково бы ни было положительное число ε, всегда можно указать такое натуральное n, что выполняется неравенство $1/n < \varepsilon$.

В самом деле, согласно IV для числа $1/\varepsilon$ можно указать натуральное n такое, что $1/\varepsilon < n$, что в силу III_6 влечет нужное неравенство.

Заметим, что для данного числа $c \geqslant 0$ в ряду $0, 1, 2, \ldots$ целых неотрицательных чисел, очевидно, имеется единственное m, для которого выполняются неравенства $m \leqslant c < m + 1$.

V. Свойство существования предела у неубывающей ограниченной последовательности действительных чисел.

Если последовательность положительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1}$$

не убывает и ограничена сверху числом M, то существует действительное число a, не превышающее M, к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leqslant M. \tag{2}$$

Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n_0 такое, что $|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon$ для всех $n > n_0$.

Доказательство. Каждый элемент a_n последовательности (1) разложим в бесконечную десятичную дробь:

$$a_n = a_{n,0}, a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3} \ldots . \tag{3}$$

Последовательность чисел (3) ограничена сверху числом M ($a_n \leqslant M$) и не убывает, поэтому на основании леммы 1 из § 2.3 последовательность десятичных дробей (3) стабилизируется к некоторому числу $a \leqslant M$:

$$a_n \rightrightarrows a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2 \ldots .$$

Но тогда a_n стремится к a как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное m такое, что $10^{-m} < \varepsilon$. Так как a_n стабилизируется к a, то найдется

n_0 такое, что при $n > n_0$ первые m компонент чисел a_n уже стабилизированы:

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_m \alpha_{n,\, m+1} \alpha_{n,\, m+2} \ldots,$$

т. е. равны соответственно первым m компонентам числа a. Но тогда

$$|a - a_n| = a - a_n = 0,\ 0 \ldots 0\ a_{n,\, m+1}\, a_{n,\, m+2}, \ldots \leqslant 10^{-m} < \varepsilon \quad (n > n_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из I—V следует более общее чем V свойство, утверждающее, что всякая *монотонная*, т. е. неубывающая или невозрастающая, ограниченная последовательность не обязательно положительных чисел имеет предел (конечный; см. далее § 3.4). Пусть R есть множество всех рациональных чисел. В R свойства I—IV выполняются, однако свойство V не всегда выполняется, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ есть произвольное положительное иррациональное число, а

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

его n-е срезки. Числа $a^{(n)}$ рациональные и образуют ограниченную сверху числом a последовательность. При этом их десятичные разложения стабилизируются к десятичному разложению числа a. Но тогда, как мы знаем,

$$\lim_{n \to \infty} a^{(n)} = a.$$

Таким образом, числа $a^{(n)}$ принадлежат R, но предел их последовательности не принадлежит R, а если учесть, что предел у последовательности может быть только один (см. далее § 3.1), то получим: для R свойство V, вообще говоря, не выполняется.

§ 2.5. Изоморфизм различных представлений действительных чисел. Длина отрезка, физические величины

В предыдущих параграфах были определены действительные числа a, b, c, ... в виде бесконечных десятичных разложений и было установлено, что они удовлетворяют свойствам, составляющим указанные выше группы I—V (коротко, свойствам I—V). Но мы могли бы, рассуждая аналогично, определить бесконечные двоичные или троичные (вообще n-ичные) разложения a', b', c', ... и ввести для них понятия «$>$» и операции сложения «$+$» и умножения «$\cdot$». При проверке оказалось бы, что эти новые объекты тоже удовлетворяют свойствам I—V.

Отметим еще так называемые дедекиндовы сечения во множестве рациональных чисел. Во многих учебниках именно на их основе определяют действительные числа (см. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, ГТТИ, 1938, а также Г. М. Фихтен-