n_0 такое, что при $n > n_0$ первые m компонент чисел a_n уже стабилизированы:

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_m \alpha_{n, m+1} \alpha_{n, m+2} \ldots,$$

т. е. равны соответственно первым m компонентам числа a. Но тогда

$$|a - a_n| = a - a_n = 0, 0 \ldots 0 \, a_{n, m+1} \, a_{n, m+2}, \ldots \leqslant 10^{-m} < \varepsilon \quad (n > n_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из I—V следует более общее чем V свойство, утверждающее, что всякая *монотонная*, т. е. неубывающая или невозрастающая, ограниченная последовательность не обязательно положительных чисел имеет предел (конечный; см. далее § 3.4). Пусть R есть множество всех рациональных чисел. В R свойства I—IV выполняются, однако свойство V не всегда выполняется, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ есть произвольное положительное иррациональное число, а

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

его n-е срезки. Числа $a^{(n)}$ рациональные и образуют ограниченную сверху числом a последовательность. При этом их десятичные разложения стабилизируются к десятичному разложению числа a. Но тогда, как мы знаем,

$$\lim_{n \to \infty} a^{(n)} = a.$$

Таким образом, числа $a^{(n)}$ принадлежат R, но предел их последовательности не принадлежит R, а если учесть, что предел у последовательности может быть только один (см. далее § 3.1), то получим: для R свойство V, вообще говоря, не выполняется.

§ 2.5. Изоморфизм различных представлений действительных чисел. Длина отрезка, физические величины

В предыдущих параграфах были определены действительные числа $a, b, c, \ldots$ в виде бесконечных десятичных разложений и было установлено, что они удовлетворяют свойствам, составляющим указанные выше группы I—V (коротко, свойствам I—V). Но мы могли бы, рассуждая аналогично, определить бесконечные двоичные или троичные (вообще n-ичные) разложения $a', b', c', \ldots$ и ввести для них понятия «$>$» и операции сложения «$+$» и умножения «$\cdot$». При проверке оказалось бы, что эти новые объекты тоже удовлетворяют свойствам I—V.

Отметим еще так называемые дедекиндовы сечения во множестве рациональных чисел. Во многих учебниках именно на их основе определяют действительные числа (см. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, ГТТИ, 1938, а также Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, «Наука», 1970).

Всевозможные дедекиндовы сечения a', b', c', ... представляют собой не что иное, как разложения всего множества рациональных чисел на два непустых класса $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, где любое число класса $\mathfrak{A}$ меньше любого числа класса $\mathfrak{B}$. Оказывается, что для дедекиндовых сечений можно определить понятия «$>$», «$+$», «$\cdot$» и установить, что с этими определениями они удовлетворяют свойствам I—V.

Наконец, отметим, что при определении действительных чисел иногда считают удобным вводить (см. В. В. Немыцкий, М. И. Слудская и А. Н. Черкасов, Курс математического анализа, т. I, Физматгиз, 1957) так называемые фундаментальные последовательности рациональных чисел. Существенно разные (в известном смысле) такие последовательности обозначают символами a', b', c' ..., вводят для них понятия «$>$», «$+$», «$\cdot$» и доказывают, что они удовлетворяют свойствам I—V.

Важно отметить, что все указанные определения действительных чисел с формальной точки зрения не отличаются друг от друга. Это следует из формулируемой ниже теоремы, которую можно назвать *теоремой об изоморфизме множеств, удовлетворяющих условиям* I—V.

Понятие *изоморфизм*, точнее, *изоморфизм относительно свойств* «$>$», «$+$», «$\cdot$», lim (предел) будет разъяснено ниже попутно.

Теорема 1. *Пусть E есть множество десятичных дробей a, b, c, ... и E' есть множество элементов a', b', c', ..., для которых определены понятия больше («$>$») и операции сложения («$+$») и умножения («$\cdot$») так, что выполняются свойства* I—V.

Тогда между элементами $a \in E$ и $a' \in E'$ можно указать взаимно однозначное соответствие

$$a \sim a',$$

являющееся изоморфизмом по отношению к понятию «$>$», арифметическим действиям и понятию предела.

Это значит, что, если

$$a \sim a', \quad b \sim b',$$

то

$$\left.\begin{aligned} a \pm b &\sim a' \pm b', \\ ab &\sim a'b' \\ \frac{a}{b} &\sim \frac{a'}{b'} \quad (b \neq 0), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

если при этом $a < b$, то $a' < b'$.

Наконец, для ограниченной сверху неубывающей последовательности элементов $a_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sim \lim_{n\to\infty} a'_n. \tag{2}$$

Таким образом, будем ли мы оперировать десятичными разложениями a, b, c, ... или им соответствующими элементами a', b', c', ..., если это оперирование сводится к арифметическим действиям, взятым в конечном числе, или к нахождению предела неубывающей последовательности, мы каждый раз будем приходить к элементам d и d', находящимся в указанном выше соответствии $d \sim d'$.

Таким образом, все определенные выше конкретные множества (дедекиндовых сечений, фундаментальных последовательностей, бесконечных двоичных разложений и т. д.) изоморфны между собой в указанном смысле.

Это указывает на возможность корректно определить понятие действительного числа аксиоматически в том смысле, как это уже было определено в конце § 2.1.

Из сказанного следует, что с формальной точки зрения все равно, исходим ли мы при определении действительных чисел из бесконечных десятичных дробей или из аксиоматического подхода к понятию числа. Конечно, с философской точки зрения второй подход более приемлем: числа суть абстракции, выражающие количественные отношения в природе, а десятичные дроби — их представляющие формальные символы.

Приведем основные факты, связанные с доказательством теоремы об изоморфизме.

Пусть E есть множество всех действительных чисел и E' — множество, вообще говоря, любых других объектов, удовлетворяющих свойствам I—V.

Тогда в E' имеются нуль $0'$ и единица $1'$ $(0' < 1')$ и имеют смысл элементы $2' = 1' + 1'$, $3' = 2' + 1'$, ... и элементы $-1'$, $-2'$, $-3'$, ... В результате получим последовательность с двойным входом*) (различных между собой) элементов E':

$$\ldots -2',\ -1',\ 0',\ 1',\ 2',\ \ldots,$$

соответствующих целым числам

$$\ldots -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Элементы (3) можно делить друг на друга, исключая деление на $0'$. Поэтому в E' имеются (рациональные) элементы вида $\pm p'/q' = \pm n'p'/n'q' = a'$ $(q' > 0,\ p' \geqslant 0)$, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами $\pm p/q = a$, что мы кратко запишем так: $a \sim a'$. Здесь n' соответствует натуральному числу n. Это соответствие является *изоморфизмом по отношению к знаку «$>$» и арифметическим операциям*, т. е. выполняются соотношения (1) пока для рациональных элементов.

На самом деле указанный изоморфизм $a \sim a'$ распространяется на все элементы множеств E и E'. Убедимся в этом. В силу уже установленного изоморфизма между рациональными элементами имеет место соответствие

$$\pm\, \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \sim \pm\, \alpha_0', \alpha_1' \ldots \alpha_n' = \pm\, (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n)'/10^{n'}$$

---

*) Про элементы a_k, зависящие от целого k и расположенные так:

$$\ldots a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$$

говорят, что они образуют *последовательность с двойным входом.*

между конечными десятичными дробями E и E', где в скобках справа находится целое число $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n = \alpha_0 10^n + \alpha_1 10^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. Это соответствие изоморфно по отношению к знаку «$>$» и арифметическим операциям. Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ есть произвольное положительное число, представленное бесконечной десятичной дробью.

Легко видеть, что оно является пределом неубывающей последовательности его срезок: $a = \lim a^{(n)}$. Так как $a^{(n)} \leqslant \alpha_0 + 1$ для любого числа $n = 1, 2, \ldots$, то также $a^{(n)'} \leqslant (\alpha_0 + 1)'$. Кроме того, элементы $a^{(n)'}$ не убывают, потому что числа $a^{(n)}$ не убывают. Поэтому на основании свойства V, которое предположено верным в E', существует в E' элемент a', являющийся пределом: $a' = \lim a^{(n)'}$.

Естественно a' записать в виде выражения $a' = \alpha_0', \alpha_1' \alpha_2' \ldots$, называя его бесконечной десятичной дробью в E', а $a^{(n)'}$ — его n-ми срезками. Этим каждому действительному числу a приведен в соответствие элемент $a' \in E'$ $(a \to a')$. Это соответствие не противоречит соответствию

$$\alpha_0, \ \alpha_1 \ldots \alpha_k \to \alpha_0', \alpha_1' \ldots \alpha_k',$$

потому что наряду с равенством

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} (\alpha_k - 1) 99 \ldots \qquad (\alpha_k > 0)$$

имеет место равенство

$$\alpha_0'\alpha_1' \cdots \alpha_k' = \alpha_0'\alpha_1' \cdots \alpha_{k-1}' \left(\alpha_k' - 1\right) 9'9' \cdots \tag{4}$$

Ведь бесконечная дробь справа по определению есть предел ее срезок (в E'), но число $\alpha_0', \alpha_1' \ldots \alpha_k'$, как нетрудно видеть, уже является этим пределом, но тогда они равны, потому что последовательность может иметь единственный предел.

Но мы еще покажем, что всякий элемент $\lambda \in E'$ обязательно соответствует некоторому числу $a \in E$ и притом единственному.

Зададим произвольный положительный элемент $\lambda \in E'$. Согласно архимедову свойству (верному в E') существует натуральный элемент $n' > \lambda$. Таким образом, $0' < \lambda < n'$ и, так как $0' < 1'$, то $0' < 1' < 2' < \ldots < n'$. В этой цепи, очевидно, существует единственный (целый неотрицательный) элемент α_0' такой, что $\alpha_0' \leqslant \lambda < \alpha_0' + 1'$. Пересматривая теперь элементы конечной цепи $\alpha_0', 0' < \alpha_0, 1' < \cdots < \alpha_0, 9' < \alpha_0' + 1'$, найдем среди них единственный α_0, α_1' такой, что

$$(\alpha_0, \alpha_1)' \leqslant \lambda < (\alpha_0, \alpha_1 + 1)'$$

(если $\alpha_1 = 9$, то $(\alpha_0, \alpha_1 + 1)' = \alpha_0' + 1$). Продолжив этот процесс, по индукции получим последовательность цифр $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ такую, что

$$(\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k)' \leqslant \lambda < (\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} (\alpha_k + 1))'$$

при любом k. Так как к тому же правая часть в этих соотношениях отличается от левой на $(10^{-k})' \to 0$ $(k \to \infty)$, то

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} (\alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_k)'. \tag{5}$$

Итак, каждый положительный элемент $\lambda \in E'$ соответствует некоторому очевидно положительному числу a $(a = \lambda)$. Единственность этого числа вытекает из следующих соображений.

Пусть $0 < a < b$. Найдутся конечная десятичная дробь r, и натуральное l такие, что $0 < a^{(n)} \leqslant a < r \leqslant b^{(l)} \leqslant b$ для всех натуральных n. Поэтому $a' = \lim a^{(n)\prime} \leqslant r' < b^{(l)\prime} \leqslant b'$, т. е. $a' < b'$.

Этим доказано (пока в случае положительных a, a'), что соответствие $a \to a'$ изоморфно по отношению к знаку «$>$». В частности, установлено, что разным положительным a соответствуют разные положительные a'. Таким образом, соответствие $a \to a'$ есть на самом деле взаимно однозначное соответствие $a \rightleftarrows a'$ (или $a \sim a'$) между положительными элементами E и E'.

Отметим, что для положительных a, $b \in E$ имеют место равенства

$$\begin{gathered}
\left(a^{(n)} + b^{(n)}\right)' = a^{(n)\prime} + b^{(n)\prime},\\
\left[a^{(n)} - \left(b^{(n)} + 10^{-n}\right)\right]' = a^{(n)\prime} - \left(b^{(n)\prime} + 10^{-n'}\right) \quad (a > b),\\
\left(a^{(n)} b^{(n)}\right)^{(n)\prime} = \left(a^{(n)\prime} b^{(n)\prime}\right)^{(n)\prime},\\
\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)' = \frac{a^{(n)\prime}}{b^{(n)\prime} + 10^{-n'}}.
\end{gathered} \tag{6}$$

И так как из того, что последовательность десятичных дробей

$$c_n = \alpha_{0n}, \alpha_{1n}\alpha_{2n} \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

стабилизируется к дроби $c = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2 \ldots$ ($c_n \rightrightarrows c$), следует, что c_n' стабилизируется к c' $\left(c_n' \rightrightarrows c'\right)$, то равенства (6) влекут соответствия (1). Верно также соотношение (2).

Для отрицательных чисел a полагаем $a' = -(-a')$. В результате вместе с соответствием $0 \sim 0'$ получим взаимно однозначное соответствие $a \sim a'$ между действительными числами и всеми элементами E'. Оно, очевидно, изомофно относительно знака «$>$», а также относительно арифметических операций. Не приводя все детали рассуждений, поясняющих это последнее утверждение, ограничимся доказательством равенства $(a+b)' = a' + b'$, когда $a > 0$, $b < 0$, $a > |b|$.

В этом случае

$$(a+b)' = (a - |b|)' = a' - |b'| = a' + b'.$$

Первое равенство в этой цепи верно в силу известных свойств чисел, второе уже доказано для $a > |b|$, третье — в силу того, что $a' - |b'|$ есть такой элемент E', который надо прибавить к $|b'|$, чтобы получить a'. Этот элемент (единственный) есть $a' + (-|b'|) = a' + (-(-b)') = a' + b'$ (см. сноску к свойствам II в § 2.4).

Особое внимание занимает представление чисел точками прямой, являющееся общепринятой удобной геометрической интерпретацией чисел. Остановимся на нем подробнее.

Предупредим читателя, что приводимые ниже рассуждения носят не очень формальный характер, скорее, они представляют собой схему, следуя которой можно провести аккуратные рассуждения.

Будем рассматривать всевозможные отрезки прямых, лежащих в данной плоскости. Среди них выберем один произвольный, о котором будем говорить, что он имеет длину, равную единице. Равновеликие отрезки, совпадающие при наложении, обладают некоторым общим свойством, которое обозначают буквой a (или b, c, ...) и называют *длиной* любого из этих отрезков. Пусть σ и δ — отрезки длины соответственно a и b. Если при наложении их друг на друга σ окажется *существенной* частью δ, т. е. если при этом окажется, что σ есть часть δ и σ не совпадает с δ, то считают, что их длины находятся в отношении $a < b$.

Отрезок, полученный из единичного отрезка делением последнего на q равных частей и взятием геометрической суммы p таких частей, называется *рациональным* (*соизмеримым с единицей*).

Ясно, что длины отрезков удовлетворяют аксиомам I.

По определению, сумма $a+b$ и разность $a-b$ $(a>b)$ суть соответственно длины геометрической суммы и разности отрезков. Легко видеть, что свойства II (за исключением пока II_3, II_4) для длин удовлетворяются.

На рис. 2.1 изображен произвольный угол, на одной стороне которого отложены от вершины последовательно отрезки OA и AC длины 1 и b, а на другой — отрезок OB длины a. Кроме того, проведена прямая CD, параллельная прямой AB. Она отсекает отрезок BD, длину которого, по определению, назовем произведением ab. Это определение корректно, потому что, если бы мы подобную конструкцию создали для другого угла O' (рис. 2.2), то получили бы отрезок $B'D'$, равновеликий отрезку BD.

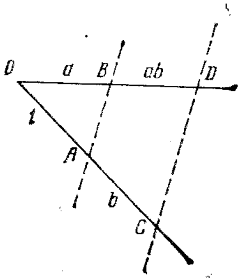

Рис. 2.1.

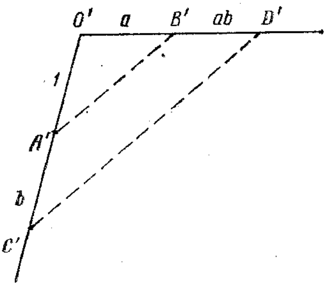

Рис. 2.2.

Ясно, как определить a/b — результат деления a на b. Надо (рис. 2.3) на одной стороне угла отложить последовательно от вершины отрезки длины b и a, а на другой — единичный отрезок, провести CD параллельно AB, и тогда длина AC, по определению, есть a/b. Это определение также корректно, и при этом действие деления оказывается обратным к умножению: $b(a/b)=a$.

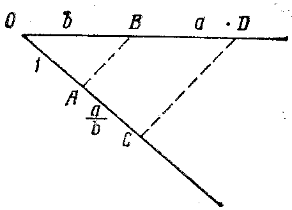

Рис. 2.3.

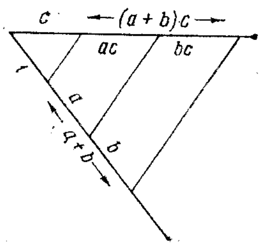

Рис. 2.4.

Легко проверяется геометрически, что свойства III для длин удовлетворяются. Например, дистрибутивный закон III_5 проверяется с помощью рис. 2.4. Подобным образом проверяется, что $(a-b)c=ac-bc$ $(a>b)$.

Рассмотрим теперь прямую с отмеченной на ней точкой 0. Точкам прямой, лежащим правее 0, взаимно однозначно соответствуют длины отрезков, соединяющих эти точки с нулевой точкой. Эти длины будем называть положительными длинами. Вводим формально отрицательную длину $-a$, соответствующую точке прямой, симметричной относительно 0 точке a (т. е. точке, соответствующей длине a). Точке 0 чисто формально приводим в соответствие длину нуль. В результате между точками всей прямой и новыми символами a, b, ..., которые могут теперь быть положительными, отрицательными и нулем, установлено взаимно однозначное соответствие. По известным правилам, которые незачем повторять, для новых символов определяются арифметические операции и знак «$>$». Они удовлетворяют, как это доказывается в курсе элементарной алгебры, свойствам I—III, поскольку положительные a, b, ... им удовлетворяют. На прямой мы можем мысленно отметить рациональные точки $\pm p/q$, соответствующие положительным и отрицательным длинам отрезков, соизмеримых с выбранной единицей. Они сами по себе удовлетворяют свойствам I—II.

Свойства IV, V для новых объектов также удовлетворяются. Свойство V выражает на математическом языке тот факт, что прямую мы мыслим как некоторый непрерывный геометрический образ. Таким образом, снабженные знаком (как указано выше) длины отрезков удовлетворяют свойствам I—V и, следовательно, они изоморфны действительным числам. Это обстоятельство позволяет в практике смешивать понятие длины отрезка и понятие соответствующего этому отрезку в силу указанного изоморфизма числа.

В заключение отметим, что физика доставляет нам много примеров понятий, изоморфных действительным числам; их называют физическими величинами. Температура, масса, скорость, если она направлена вдоль определенной прямой,— это все физические величины. Впрочем, они могут оказаться изоморфными не всем действительным числам, а только принадлежащим некоторому интервалу. Например, в случае массы этим интервалом является $(0, \infty)$.

§ 2.6. Дополнение

Этот параграф содержит доказательства и схемы доказательств отдельных утверждений § 2.4. Мы думаем, что читатель, желающий с ними ознакомиться, легче их воспримет после того, как усвоит следующую далее гл. 3. Это не значит, что § 2.6 базируется на гл. 3, но в идейном отношении излагаемые как тут, так и там вопросы схожи, и в то же время изложение в § 2.6 носит достаточно сжатый характер.

Справедливо свойство:

Пусть для бесконечных дробей $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$, *не имеющих периода* 9, *верно равенство*

$$b^{(n)} = a^{(n)} + \lambda_n, \tag{1}$$

где λ_n *стремится к нулю при* $n \to \infty$ ($a^{(n)}$, $b^{(n)}$ — *срезки* a, b). *Тогда* $a = b$ *и, следовательно,* $\alpha_k = \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Пусть обе десятичные дроби a и b не имеют периода 9. Допустим, что они не равны, для определенности $a < b$. Тогда при некотором натуральном k

$$a = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1} \ldots,$$
$$b = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\beta_k\beta_{k+1} \ldots \qquad (\alpha_k < \beta_k),$$

и, кроме того, $\alpha_s < 9$ при некотором $s > k$. Поэтому при любом $n > s$

$$b^{(n)} - a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\beta_k\beta_{k+1} \ldots \beta_n - \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1} \ldots \alpha_n \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\beta_k - \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1} \ldots \alpha_{s-1}(\alpha_s + 1) = \delta > 0.$$

Но это невозможно, потому что по условию $b^{(n)} - a^{(n)} = \lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что равенство

$$c = \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_k 99 \ldots = \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{k-1}(\gamma_k + 1)000 \ldots$$

показывает, что n-е срезки входящих в него десятичных дробей отличают-