рицательными и нулем, установлено взаимно однозначное соответствие. По известным правилам, которые незачем повторять, для новых символов определяются арифметические операции и знак «$>$». Они удовлетворяют, как это доказывается в курсе элементарной алгебры, свойствам I—III, поскольку положительные a, b, ... им удовлетворяют. На прямой мы можем мысленно отметить рациональные точки $\pm p/q$, соответствующие положительным и отрицательным длинам отрезков, соизмеримых с выбранной единицей. Они сами по себе удовлетворяют свойствам I—II.

Свойства IV, V для новых объектов также удовлетворяются. Свойство V выражает на математическом языке тот факт, что прямую мы мыслим как некоторый непрерывный геометрический образ. Таким образом, снабженные знаком (как указано выше) длины отрезков удовлетворяют свойствам I—V и, следовательно, они изоморфны действительным числам. Это обстоятельство позволяет в практике смешивать понятие длины отрезка и понятие соответствующего этому отрезку в силу указанного изоморфизма числа.

В заключение отметим, что физика доставляет нам много примеров понятий, изоморфных действительным числам; их называют физическими величинами. Температура, масса, скорость, если она направлена вдоль определенной прямой,— это все физические величины. Впрочем, они могут оказаться изоморфными не всем действительным числам, а только принадлежащим некоторому интервалу. Например, в случае массы этим интервалом является $(0, \infty)$.

§ 2.6. Дополнение

Этот параграф содержит доказательства и схемы доказательств отдельных утверждений § 2.4. Мы думаем, что читатель, желающий с ними ознакомиться, легче их воспримет после того, как усвоит следующую далее гл. 3. Это не значит, что § 2.6 базируется на гл. 3, но в идейном отношении излагаемые как тут, так и там вопросы схожи, и в то же время изложение в § 2.6 носит достаточно сжатый характер.

Справедливо свойство:

Пусть для бесконечных дробей $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$, *не имеющих периода* 9, *верно равенство*

$$b^{(n)} = a^{(n)} + \lambda_n, \tag{1}$$

где λ_n *стремится к нулю при* $n \to \infty$ ($a^{(n)}$, $b^{(n)}$ — *срезки* a, b). *Тогда* $a = b$ *и, следовательно,* $\alpha_k = \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Пусть обе десятичные дроби a и b не имеют периода 9. Допустим, что они не равны, для определенности $a < b$. Тогда при некотором натуральном k

$$a = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots,$$
$$b = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\ldots \qquad (\alpha_k < \beta_k),$$

и, кроме того, $\alpha_s < 9$ при некотором $s > k$. Поэтому при любом $n > s$

$$b^{(n)} - a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\ldots\beta_n - \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n \geqslant$$
$$\geqslant \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\beta_k - \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{s-1}(\alpha_s+1) = \delta > 0.$$

Но это невозможно, потому что по условию $b^{(n)} - a^{(n)} = \lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что равенство

$$c = \gamma_0,\gamma_1\ldots\gamma_k 99\ldots = \gamma_0,\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}(\gamma_k+1)000\ldots$$

показывает, что n-е срезки входящих в него десятичных дробей отличаются на величину 10^{-n}, стремящуюся к нулю при $n\to\infty$. Но тогда данное свойство, доказанное уже для десятичных дробей a и b, не имеющих периода 9, верно также, если одна из них или обе имеют 9 своим периодом.

Докажем теперь, что, если $a>b>0$, то

$$(a-b)+b=a. \tag{2}$$

В самом деле,

$$a^{(n)}-(b^{(n)}+10^{-n})\rightrightarrows a-b, \qquad (a-b)^{(n)}+b^{(n)}\rightrightarrows(a-b)+b.$$

Поэтому для каждого n найдется такое $s>n$, что

$$(a-b)^{(n)}=[a^{(s)}-(b^{(s)}+10^{-s})]^{(n)}=a^{(n)}-b^{(n)}+\lambda_n, \tag{3}$$

$$[(a-b)+b]^{(n)}=[(a-b)^{(s)}+b^{(s)}]^{(n)}=(a-b)^{(n)}+b^{(n)}+\mu_n,$$

где $\lambda_n\to 0$ и $\mu_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Но тогда

$$[(a-b)+b]^{(n)}=(a-b)^{(n)}+b^{(n)}+\mu_n=$$
$$=a^{(n)}-b^{(n)}+\lambda_n+b^{(n)}+\mu_n=a^{(n)}+\nu_n, \tag{4}$$

где $\nu_n=\lambda_n+\mu_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

Из соотношения (4) на основании доказанного свойства следует (2).

Величину (бесконечно малую) $\lambda_n\to 0$ $(n\to\infty)$ принято еще записывать так: $o(1)$ $(n\to\infty)$. Надо иметь в виду, что если наряду с λ_n рассматривается тут же другая бесконечно малая величина, ее обозначают тем же символом $o(1)$.

Покажем, что

$$a+(b+c)=(a+b)+c. \tag{5}$$

В самом деле, при $n\to\infty$

$$[a+(b+c)]^{(n)}=a^{(n)}+(b+c)^{(n)}+o(1)=$$
$$=a^{(n)}+b^{(n)}+c^{(n)}+o(1) \tag{6}$$

$$[(a+b)+c]^{(n)}=(a+b)^{(n)}+c^{(n)}+o(1)=$$
$$=a^{(n)}+b^{(n)}+c^{(n)}+o(1). \tag{7}$$

Поэтому на основании доказанного свойства имеет место (5).

Свойства $\mathrm{III}_1-\mathrm{III}_5$ суть непосредственные следствия нижеследующих равенств:

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)}=(b^{(n)}a^{(n)})^{(n)}, \tag{8}$$

$$((ab)^{(n)}c^{(n)})^{(n)}=(ab)^{(n)}c^{(n)}+o(1)=a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)}+o(1)\quad(n\to\infty), \tag{9}$$

$$(a^{(n)}(bc)^{(n)})^{(n)}=a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)}+o(1)\quad(n\to\infty), \tag{10}$$

$$(a^{(n)}\cdot(1)^{(n)})^{(n)}=a^{(n)}+o(1)\quad(n\to\infty), \tag{11}$$

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{(n)}a^{(n)}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(n)}a^{(n)}+o(1)=\frac{1}{a^{(n)}+10^{-n}}a^{(n)}+o(1)=1+o(1), \tag{12}$$

$$((a+b)^{(n)}c^{(n)})^{(n)}=(a+b)^{(n)}c^{(n)}+o(1)=a^{(n)}c^{(n)}+b^{(n)}c^{(n)}+o(1), \tag{13}$$

$$(ac)^{(n)}+(bc)^{(n)}=a^{(n)}c^{(n)}+b^{(n)}c^{(n)}+o(1)\quad(n\to\infty). \tag{14}$$

Свойство (8) очевидно. Для примера поясним доказательство свойства (9). Первое его равенство верно потому, что снятие внешнего значка n влечет увеличение первого члена (9) на величину (конечную десятичную дробь), не превышающую $10^{-n}=o(1)$.

Далее, ab есть число, к которому стабилизируется

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} \rightrightarrows ab.$$

Но тогда для любого n найдется зависящее от него $s \geqslant n$ такое, что (μ_n, $\nu_n = o(1)$, $n \to \infty$)

$$(ab)^{(n)} = (a^{(s)}b^{(s)})^{(n)} = \{(a^{(n)} + \mu_n)(b^{(n)} + \nu_n)\}^{(n)} =$$
$$=\{a^{(n)}b^{(n)} + (a^{(n)}\nu_n + b^{(n)}\mu_n + \mu_n\nu_n)\}^{(n)} = \{a^{(n)}b^{(n)} + o(1)\}^{(n)} =$$
$$= (a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} + o(1) = a^{(n)}b^{(n)} + o(1) \quad (n \to \infty).$$

В третьем равенстве надо принять во внимание, что $a^{(n)} \leqslant a$ и $b^{(n)} \leqslant b$, поэтому $a^{(n)}\nu_n = o(1)$, $b^{(n)}\mu_n = o(1)$, кроме того, $o(1) + o(1) = o(1)$. Из (9) — (14) следует соответственно III_1 — III_5 в силу доказанного выше утверждения (2). Проверку того факта, что действия над бесконечными дробями согласованы с соответствующими действиями над рациональными дробями, предоставляем читателю.

В случае, например, сложения требуется проверить, что бесконечное десятичное разложение суммы

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$$

в точности равно сумме бесконечных десятичных разложений слагаемых.

§ 2.7. Неравенства для абсолютных величин

Неравенство

$$|a| < \varepsilon \tag{1}$$

эквивалентно двум неравенствам

$$-\varepsilon < a < \varepsilon. \tag{1'}$$

Отсюда неравенство

$$|a - b| < \varepsilon \tag{2}$$

эквивалентно неравенствам

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon. \tag{2'}$$

Аналогично, неравенство

$$|a - b| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

эквивалентно неравенствам $b - \varepsilon \leqslant a \leqslant b + \varepsilon$.

Справедливы также неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{4}$$

$$|a - b| \geqslant \big|\, |a| - |b| \,\big|. \tag{5}$$

Неравенство (4) можно получить, рассмотрев отдельно четыре случая: 1) $a, b \geqslant 0$, 2) $a, b \leqslant 0$, 3) $a \leqslant 0 \leqslant b$, 4) $b \leqslant 0 \leqslant a$.

Например, в случае 2)

$$a + b \leqslant b \leqslant 0, \quad |a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$