Далее, ab есть число, к которому стабилизируется

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} \rightrightarrows ab.$$

Но тогда для любого n найдется зависящее от него $s \geqslant n$ такое, что (μ_n, $\nu_n = o(1)$, $n \to \infty$)

$$(ab)^{(n)} = (a^{(s)}b^{(s)})^{(n)} = \{(a^{(n)} + \mu_n)(b^{(n)} + \nu_n)\}^{(n)} =$$
$$= \{a^{(n)}b^{(n)} + (a^{(n)}\nu_n + b^{(n)}\mu_n + \mu_n\nu_n)\}^{(n)} = \{a^{(n)}b^{(n)} + o(1)\}^{(n)} =$$
$$= (a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} + o(1) = a^{(n)}b^{(n)} + o(1) \quad (n \to \infty).$$

В третьем равенстве надо принять во внимание, что $a^{(n)} \leqslant a$ и $b^{(n)} \leqslant b$, поэтому $a^{(n)}\nu_n = o(1)$, $b^{(n)}\mu_n = o(1)$, кроме того, $o(1) + o(1) = o(1)$. Из (9) — (14) следует соответственно III_1 — III_5 в силу доказанного выше утверждения (2). Проверку того факта, что действия над бесконечными дробями согласованы с соответствующими действиями над рациональными дробями, предоставляем читателю.

В случае, например, сложения требуется проверить, что бесконечное десятичное разложение суммы

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$$

в точности равно сумме бесконечных десятичных разложений слагаемых.

§ 2.7. Неравенства для абсолютных величин

Неравенство

$$|a| < \varepsilon \tag{1}$$

эквивалентно двум неравенствам

$$-\varepsilon < a < \varepsilon. \tag{1'}$$

Отсюда неравенство

$$|a - b| < \varepsilon \tag{2}$$

эквивалентно неравенствам

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon. \tag{2'}$$

Аналогично, неравенство

$$|a - b| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

эквивалентно неравенствам $b - \varepsilon \leqslant a \leqslant b + \varepsilon$.

Справедливы также неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{4}$$

$$|a - b| \geqslant \big|\,|a| - |b|\,\big|. \tag{5}$$

Неравенство (4) можно получить, рассмотрев отдельно четыре случая: 1) a, $b \geqslant 0$, 2) a, $b \leqslant 0$, 3) $a \leqslant 0 \leqslant b$, 4) $b \leqslant 0 \leqslant a$.

Например, в случае 2)

$$a + b \leqslant b \leqslant 0, \quad |a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$

а в случае 3), если допустить что $|b| \geqslant |a|$,

$$|a+b| = b+a \leqslant |a| + |b|.$$

Случай 3) при допущении $|b| \leqslant |a|$ читатель разберет сам, так же как случай 1). Случай 4) сводится к 3).

Далее, в силу (4)

$$|a| \leqslant |b| + |a-b|, \quad |b| \leqslant |a| + |a-b|,$$

т. е.

$$|a| - |a-b| \leqslant |b| \leqslant |a| + |a-b|,$$

но тогда верно (5).

§ 2.8. Точные верхняя и нижняя грани множества

Множество E действительных чисел x называется *ограниченным*, если существует положительное число M такое, что выполняется неравенство $|x| < M$ для всех $x \in E$ или, что все равно, $-M < x < M$.

Если E не удовлетворяет указанному свойству, т. е. каково бы ни было положительное число M (как бы оно ни было велико), найдется такое $x_0 \in E$, что $|x_0| > M$, то E называется *неограниченным*.

Множество E называется *ограниченным сверху* (соответственно *снизу*), если существует число K (соответственно k) такое, что $x \leqslant K$ (соответственно $k \leqslant x$) для всех $x \in E$. Число K (соответственно k) называется *верхней* (*нижней*) *гранью* E.

Очевидно, что *ограниченное множество является одновременно ограниченным сверху и снизу*. Множество R всех действительных чисел, очевидно, неограничено как снизу, так и сверху; множество R_+ положительных чисел ограничено снизу, но не ограничено сверху; отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) при конечных a и b являются примерами ограниченных множеств.

Число M (соответственно m) называется *точной верхней* (соответственно *нижней*) *гранью множества чисел* A, если выполняются следующие свойства:

1) $x \leqslant M$ (соответственно $x \geqslant m$) для всех $x \in A$.

2) Как бы ни было мало́ $\varepsilon > 0$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M - \varepsilon < x_0$ ($x_0 < m + \varepsilon$).

Точная верхняя грань A обозначается так:

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x,$$

а точная нижняя грань так:

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x,$$

(sup, inf — сокращения латинских слов supremum — наивысший, infimum — наинизший). В следующем параграфе будет доказано