а в случае 3), если допустить что $|b| \geqslant |a|$,

$$|a+b| = b + a \leqslant |a| + |b|.$$

Случай 3) при допущении $|b| \leqslant |a|$ читатель разберет сам, так же как случай 1). Случай 4) сводится к 3).

Далее, в силу (4)

$$|a| \leqslant |b| + |a-b|, \quad |b| \leqslant |a| + |a-b|,$$

т. е.

$$|a| - |a-b| \leqslant |b| \leqslant |a| + |a-b|,$$

но тогда верно (5).

§ 2.8. Точные верхняя и нижняя грани множества

Множество E действительных чисел x называется *ограниченным*, если существует положительное число M такое, что выполняется неравенство $|x| < M$ для всех $x \in E$ или, что все равно, $-M < x < M$.

Если E не удовлетворяет указанному свойству, т. е. каково бы ни было положительное число M (как бы оно ни было велико), найдется такое $x_0 \in E$, что $|x_0| > M$, то E называется *неограниченным*.

Множество E называется *ограниченным сверху* (соответственно *снизу*), если существует число K (соответственно k) такое, что $x \leqslant K$ (соответственно $k \leqslant x$) для всех $x \in E$. Число K (соответственно k) называется *верхней* (*нижней*) *гранью* E.

Очевидно, что *ограниченное множество является одновременно ограниченным сверху и снизу*. Множество R всех действительных чисел, очевидно, неограничено как снизу, так и сверху; множество R_+ положительных чисел ограничено снизу, но не ограничено сверху; отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) при конечных a и b являются примерами ограниченных множеств.

Число M (соответственно m) называется *точной верхней* (соответственно *нижней*) *гранью множества чисел* A, если выполняются следующие свойства:

1) $x \leqslant M$ (соответственно $x \geqslant m$) для всех $x \in A$.

2) Как бы ни было мало́ $\varepsilon > 0$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M - \varepsilon < x_0$ ($x_0 < m + \varepsilon$).

Точная верхняя грань A обозначается так:

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x,$$

а точная нижняя грань так:

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x,$$

(sup, inf — сокращения латинских слов supremum — наивысший, infimum — наинизший). В следующем параграфе будет доказано существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества, так же как точной нижней грани у ограниченного снизу множества. Единственность их очевидна.

Для неограниченного сверху множества A будем писать:

$$\sup A = \sup_{x \in A} x = +\infty,$$

а для неограниченного снизу:

$$\inf A = \inf_{x \in A} x = -\infty;$$

будем называть в этом случае $+\infty$, $-\infty$ соответственно точной верхней и точной нижней гранью A.

Отрезок $[a, b]$ и интеграл (a, b), очевидно, имеют в качестве своей точной верхней грани точку (число) b. В случае отрезка точная верхняя грань (число b) принадлежит ему, а в случае интервала — не принадлежит. Множество $(-\infty, 0)$, очевидно, имеет в качестве своей точной верхней грани число 0 и в качестве нижней символ $-\infty$.

Отметим очевидное равенство

$$\inf_{x \in A} x = -\sup_{x \in A} (-x).$$

Выше мы определили понятие точной верхней грани отдельно для ограниченного и для неограниченного сверху множества. Ниже дается общее определение, годное для обоих случаев.

Число M (конечное или $+\infty$) называется *точной верхней гранью множества действительных чисел* A, если выполняются следующие свойства:

1) $x \leqslant M$ для всех $x \in A$;

2) каково бы ни было конечное число $M' < M$, найдется такое число $x_0 \in A$, что $M' < x_0 \leqslant M$.

Подобное определение можно дать и для точной нижней грани неограниченного снизу множества чисел. Теперь m может быть либо конечным числом, либо $-\infty$.

Возникает вопрос, имеет ли произвольное множество действительных чисел точную верхнюю (нижнюю) грань. Для неограниченного сверху (снизу) множества, как мы видели, имеет — по определению. Она равна $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Для ограниченного множества тоже имеет. Это будет доказано далее в § 3.6.