Глава 3

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 3.1. Понятие предела последовательности

Метод пределов есть основной метод, на котором базируется математический анализ.

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$, приведено в соответствие в силу некоторого закона число *) x_n. Тогда говорят, что этим определена *последовательность чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ или, короче, *последовательность* $\{x_n\}$.

Отдельные снабженные номерами n (*индексами*) числа x_n называют *элементами последовательности* $\{x_n\}$. Они могут быть действительными или комплексными. Мы здесь рассматриваем случай, когда они действительны.

Для разных n_1, n_2 отдельные элементы x_{n_1}, x_{n_2} последовательности могут оказаться равными как числа $\left(x_{n_1} = x_{n_2}\right)$. Однако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как разные элементы последовательности.

Ниже приводятся примеры последовательностей:

1) $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$,

3) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$,

4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\}$,

5) $\left\{1 + \frac{1}{10^n}\right\} = \{1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ \ldots\}$,

6) $\{(-1)^n\} = \{-1, +1, -1, \ldots\}$,

7) $\{1;\ 2;\ \ldots;\ 10;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots\}$.

В случае 7) не видно, как написать общую формулу для произвольного элемента x_n, однако закон образования чисел x_n ясен:

$$x_n = \begin{cases} n & (n = 1, \ldots, 10), \\ \dfrac{1}{10^{n-10}} & (n = 11, 12, \ldots). \end{cases}$$

*) То есть x_n — функция на множестве натуральных чисел.

Мы еще будем употреблять следующую терминологию: *переменная* x_n *пробегает последовательность* $\{x_n\}$ *или последовательность значений* x_n.

Переменную x_n, все значения которой равны одному и тому же числу a, называют *постоянной* и обычно обозначают просто через a.

По определению, число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется (зависящее от него) натуральное число N такое, что для всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (n > N).$$

При этом мы будем писать

$$\lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или

$$x_n \to a$$

и говорить, что *переменная* x_n *стремится к* a или что *последовательность* $\{x_n\}$ *стремится* (*сходится*) к числу a.

Покажем, что переменная 2) имеет предел, равный нулю. В самом деле, зададим ε и составим неравенство

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Оно верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$ или для всех $n > N$, где N есть какое-либо натуральное число $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что $|x_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

В точности также доказывается, что и последовательность 3) имеет предел 0. Переменная 4) стремится к 1, потому что в этом случае

$$|1 - x_n| = \left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

для всех $n > N$, где N — натуральное число, большее, чем $1/\varepsilon$.

Нетрудно показать, что и переменная 5) стремится к 1. Переменная 7), очевидно, стремится к нулю. Не имеет значения тот факт, что она сначала имеет тенденцию возрастать: в этом вопросе важно, какие значения она имеет для достаточно больших n.

Если x_n удовлетворяет неравенству

$$|a - x_n| < \varepsilon,$$

то это все равно, что x_n удовлетворяет неравенствам

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

или, употребляя геометрический язык, что точка (число) x_n принадлежит интервалу $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$. Поэтому, употребляя геометрический язык, можно дать такое определение предела: *переменная* x_n *имеет пределом число (точку)* a, *если для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое натуральное* N, *что для всех* $n>N$ *точки* $x_n\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

Произвольный интервал $(c,\ d)$, содержащий в себе точку a, т. е. такой, что $c<a<d$, называется *окрестностью точки* a. Очевидно, какова бы ни была окрестность $(c,\ d)$ точки a, найдется такое $\varepsilon>0$, что интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ содержится в $(c,\ d)$, т. е. $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)\subset(c,\ d)$.

Поэтому тот факт, что $x_n\to a$, можно выразить еще и так: какова бы ни была окрестность $(c,\ d)$ точки a, все точки x_n, начиная с некоторого номера n, должны попасть в эту окрестность, т. е. должно существовать натуральное N такое, что $x_n\in(c,\ d)$ $(n>N)$. Что касается точек $x_1,\ \ldots,\ x_N$ с индексами $n\leqslant N$, то они могут принадлежать или не принадлежать $(c,\ d)$. Таким образом, если вне $(c,\ d)$ имеются точки x_n, то их конечное число.

С другой стороны, если известно, что вне $(c,\ d)$ имеется только конечное число точек $x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_s}$, то, положив

$$N=\max\{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_s\},$$

мы можем сказать, что для всех $n>N$ точки $x_n\in(c,\ d)$. Поэтому можно дать еще такое определение предела: *переменная* x_n *имеет своим пределом* a, *если вне любой окрестности точки* a *имеется конечное или пустое множество точек* x_n.

Переменная 6) ни к какому пределу не стремится, потому что если предположить, что эта переменная имеет предел, равный a, то любая как угодно малая по длине окрестность точки a должна была бы содержать все элементы x_n, за исключением конечного числа их. Но вне интервала длины 1/2, как бы он ни был расположен на действительной оси, имеется, очевидно, бесконечное число элементов x_n нашей последовательности.

Нетрудно видеть, что и последовательность 1) не стремится ни к какому пределу. Впрочем, в дальнейшем мы будем говорить, что она стремится к бесконечности, вкладывая в это понятие несколько иной смысл.

Легко видеть, что если переменная x_n имеет предел, то он единственный. Ведь если бы она имела два предела, a и b, где $a<b$, то интервалы $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, где $\varepsilon=(b-a)/3$, должны были бы содержать каждый все точки последовательности $\{x_n\}$, за исключением конечного их числа. Но это, очевидно, невозможно, потому что эти интервалы не имеют общих точек (не пересекаются).

Пример 6) показывает, что для разных n_1, n_2 отдельные значения последовательности $\{x_n\}$ могут быть равными: $x_{n_1}=x_{n_2}$. Однако x_{n_1} и x_{n_2} рассматриваются как *разные элементы* последовательности.

Легко видеть, что *если две последовательности* $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ *имеют только конечное число различных соответствующих элементов (имеющих одинаковый индекс n), то они одновременно либо не имеют пределов, либо имеют пределы и притом равные.*

Докажем несколько теорем, выражающих свойства переменных, стремящихся к пределам.

Теорема 1. *Если переменная x_n имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда для $\varepsilon = 1$ должно найтись натуральное число N такое, что

$$1 > |x_n - a| \text{ для } n > N.$$

Отсюда $1 > |x_n - a| \geqslant |x_n| - |a|$ или

$$|x_n| < |a| + 1 \text{ для } n > N.$$

Положим $M = \max\{|a| + 1, \ |x_1|, \ \ldots, \ |x_N|\}$. Тогда очевидно, что

$$|x_n| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. переменная x_n ограничена.

Теорема 2. *Если переменная x_n имеет не равный нулю предел a, то найдется такое N, что*

$$|x_n| > \frac{|a|}{2} \quad \textit{для } n > N.$$

Больше того, для указанных n, если $a > 0$, то $x_n > a/2$, если же $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким образом, начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. *Тогда для* $\varepsilon = |a|/2$ должно найтись натуральное N такое, что

$$\frac{|a|}{2} > |a - x_n| \geqslant |a| - |x_n| \quad (n > N),$$

откуда $|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$, и первое утверждение теоремы доказано. С другой стороны, неравенство $|a|/2 > |a - x_n|$ эквивалентно следующим двум:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \quad (n > N).$$

Тогда, если $a > 0$, то

$$\frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} < x_n \quad (n > N),$$

а если $a < 0$, то

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad (n > N),$$

и этим доказано второе утверждение теоремы.

Теорема 3. *Если $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $x_n \leqslant y_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то $a \leqslant b$.*

Доказательство. Допустим, что $b < a$. Зададим $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$ и подберем натуральные N_1 и N_2 так, чтобы

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1), \ y_n < b + \varepsilon \ (n > N_2),$$

что возможно, потому что $x_n \to a$, а $y_n \to b$.

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$, то, очевидно, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ $(n > N)$, и мы пришли к противоречию, так как по условию $x_n \leqslant y_n$ для всех n.

Если бы в условии теоремы 3 было бы $x_n < y_n$ (вместо $x_n \leqslant y_n$), то все равно можно утверждать только, что $a \leqslant b$ (пример: $x_n = 1 - 3^{-n}$, $y_n = 1 - 2^{-n}$).

Теорема 4. *Если переменные x_n и y_n стремятся к одному и тому же пределу a и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то переменная z_n также стремится к a.*

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти N_1 и N_2 такие, что

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1), \quad y_n < a + \varepsilon \ (n > N_2),$$

откуда для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon,$$

и

$$|z_n - a| < \varepsilon \ (n > N),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.*

Доказательство теоремы следует из неравенства

$$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|.$$

§ 3.2. Арифметические действия с пределами

Пусть x_n и y_n обозначают переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. По определению, *сумма $x_n + y_n$, разность $x_n - y_n$, произведение $x_n y_n$ и частное x_n/y_n суть переменные*, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Если $x_n = c$ для $n = 1, 2, \ldots$, то в этом случае пишут $c \pm y_n$, cy_n, c/y_n вместо $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, x_n/y_n.