купность предельных точек множества, иррациональных точек x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$, есть, очевидно, отрезок $[0, 1]$.

Множество A, состоящее из конечного числа точек, очевидно, не может иметь предельную точку, т. е. в данном случае A' — пустое множество. Бесконечное неограниченное множество также может не иметь предельной точки, как показывает пример множества натуральных чисел 1, 2, 3... Однако, имеет место

Теорема Вейерштрасса. *Бесконечное ограниченное множество E точек имеет по крайней мере одну предельную точку, т. е. E' — не пустое множество.*

Эта теорема доказана в § 7.9 (теорема 2) в n-мерном случае. Но и сейчас читатель при желании может ее прочитать, имея в виду пока одномерный случай.

§ 3.10. Счетное множество. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел

Множество E элементов x любой природы называется *бесконечным*, если, каково бы ни было натуральное число n, в нем имеется больше, чем n элементов.

E называется *счетным*, если оно *бесконечно* и его элементы можно *перенумеровать*. Это значит, что между (всеми) элементами $x \in E$ и числами натурального ряда

$$\{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1}$$

можно установить взаимно однозначное соответствие. Если при этом элементу $x \in E$ соответствует натуральное число n, то естественно обозначить его через x_n. В результате множество E можно записать в виде *последовательности* элементов:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{2}$$

В частности, множество (1) натуральных чисел тривиальным образом счетно. Очевидно также, что множество четных натуральных чисел счетно, потому что оно бесконечно и его элементы x можно занумеровать, положив $x_n = 2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть E есть счетное множество, перенумерованное в виде последовательности (2), *и A — непустая его часть. Тогда в A имеется элемент с наименьшим номером.* В самом деле, в (2) имеется элемент $x_n \in A$ с некоторым номером n_1. Элементов $x_n \in A$ с номерами $n \leqslant n_1$ имеется только конечное число; среди них можно выбрать элемент x_{n_0} с наименьшим номером — это и будет, очевидно, элемент A, имеющий самый малый номер в A.

Если E — счетное множество и A — его бесконечная часть, то A — счетное множество, которое можно занумеровать следующим образом: обозначим через z_1 элемент A с наименьшим номером в E; выкидываем из A этот элемент и в оставшемся бесконечном множестве A_1 выбираем элемент с наименьшим номером в E, который обозначаем через z_2; выкидываем z_2 из A_1 и т. д.

Счетная (теоретико-множественная) сумма

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E^1 + E^2 + \ldots$$

счетных множеств E^k *есть счетное множество.* В самом деле, запишем элементы $x_j^k \in E^k$ $(j = 1, 2, \ldots)$ в виде таблицы:

$$\begin{aligned} E^1 &= \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots\}, \\ E^2 &= \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots\}, \\ E^3 &= \{x_1^2, x_2^3, x_3^3, \ldots\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Перенумеруем их в следующем порядке:

$$x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, x_4^1, \ldots,$$

выбрасывая, однако, на каждом этапе нумерации те элементы, которые уже были занумерованы на предыдущем этапе: ведь может случиться, что E^k и E^l имеют общие элементы. В результате получим бесконечную последовательность элементов $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$, очевидно, исчерпывающую множество E. Это доказывает, что E — счетное множество.

Аналогично доказывается, что *конечная сумма* $E = E^1 + \ldots$ $\ldots + E^N$ *счетных или конечных множеств, среди которых есть хотя бы одно счетное, счетна.*

Докажем, что *множество положительных (отрицательных) рациональных чисел, а следовательно, множество всех рациональных чисел, счетно.*

Чисел p/q $(p > 0,\ q > 0$ — целые) с $p + q = 1$ нет, среди же чисел p/q с $p + q = 2$ имеется одно: $1 = 1/1$; обозначим его через y_1. Среди не занумерованных еще чисел p/q с $p + q = 3$ имеется два: $1/2$ и $2 = 2/1$; обозначим их соответственно через y_2 и y_3; этот процесс продолжаем по индукции. В результате все положительные рациональные числа будут, очевидно, перенумерованы.

С другой стороны, *множество всех действительных чисел не счетно (несчетно).*

Докажем, что уже единичный интервал $(0, 1)$ есть несчетное множество, откуда и будет следовать высказанное утверждение, потому что мы знаем, что часть счетного множества может быть только конечной или счетной. Точки x (числа) интервала $(0, 1)$ будем записывать в виде бесконечных десятичных дробей. Допустим, что интервал $(0, 1)$ есть счетное множество, тогда все его точки можно было бы перенумеровать

$$
\begin{aligned}
x^1 &= 0, \alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1 \ldots, \\
x^2 &= 0, \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 \ldots, \\
x^3 &= 0, \alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3 \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Однако это заключение, как мы сейчас увидим, противоречиво. Для каждого натурального n определим цифру α_n так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \alpha_n < 9, \alpha_n \neq \alpha_n^n$, что, очевидно, возможно. Сконструируем число $a = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ Оно принадлежит интервалу $(0, 1)$ и должно, таким образом, значиться под некоторым номером n_0 в таблице (3): $a = x^{n_0}$. Но тогда должно было бы быть $\alpha_{n_0} = \alpha_{n_0}^{n_0}$, что невозможно.

Упражнения.

1. Доказать, что множество точек плоскости с рациональными координатами (x, y) счетно.
2. То же доказать для множества точек $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства с рациональными координатами x_j.