а если $a<0$, то

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad (n > N),$$

и этим доказано второе утверждение теоремы.

Теорема 3. *Если* $x_n \to a$, $y_n \to b$ *и* $x_n \leqslant y_n$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$, *то* $a \leqslant b$.

Доказательство. Допустим, что $b < a$. Зададим $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$ и подберем натуральные N_1 и N_2 так, чтобы

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1), \ y_n < b + \varepsilon \ (n > N_2),$$

что возможно, потому что $x_n \to a$, а $y_n \to b$.

Если $N = \max\{N_1, N_2\}$, то, очевидно, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ $(n > N)$, и мы пришли к противоречию, так как по условию $x_n \leqslant y_n$ для всех n.

Если бы в условии теоремы 3 было бы $x_n < y_n$ (вместо $x_n \leqslant y_n$), то все равно можно утверждать только, что $a \leqslant b$ (пример: $x_n = 1 - 3^{-n}$, $y_n = 1 - 2^{-n}$).

Теорема 4. *Если переменные* x_n *и* y_n *стремятся к одному и тому же пределу* a *и* $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *то переменная* z_n *также стремится к* a.

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти N_1 и N_2 такие, что

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1), \quad y_n < a + \varepsilon \ (n > N_2),$$

откуда для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon,$$

и

$$|z_n - a| < \varepsilon \ (n > N),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если* $x_n \to a$, *то* $|x_n| \to |a|$.

Доказательство теоремы следует из неравенства

$$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|.$$

§ 3.2. Арифметические действия с пределами

Пусть x_n и y_n обозначают переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. По определению, *сумма* $x_n + y_n$, *разность* $x_n - y_n$, *произведение* $x_n y_n$ *и частное* x_n/y_n *суть переменные*, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Если $x_n = c$ для $n = 1, 2, \ldots$, то в этом случае пишут $c \pm y_n$, cy_n, c/y_n вместо $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, x_n/y_n.

Справедливы следующие утверждения:

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \tag{1}$$

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n, \tag{2}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ если } \lim y_n \neq 0. \tag{3}$$

Эти утверждения надо понимать в том смысле, что *если существуют пределы x_n и y_n, то существуют также и пределы их суммы, разности, произведения и частного (с указанной оговоркой) и выполняются равенства* (1)—(3).

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > N).$$

Тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ (n > N),$$

и мы доказали (1).

Чтобы доказать (2), заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \leqslant |y_n| \, |x_n - a| + |a| \, |y_n - b|. \tag{4}$$

Так как y_n имеет предел, то (по теореме 1 предыдущего параграфа) существует положительное число M такое, что

$$|y_n| < M \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

При этом можно считать, что M выбрано так, чтобы выполнялось также неравенство

$$|a| < M. \tag{6}$$

Подберем натуральное N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (n > N). \tag{7}$$

Тогда из (4) — (7) следует, что

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad (n > N).$$

Этим доказано равенство (2).

Пусть теперь к условию, что $x_n \to a$ и $y_n \to b$, добавляется условие, что $b \neq 0$. Тогда

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{x_n b - y_n a}{y_n b} \right| = \frac{|(x_n - a) b + (b - y_n) a|}{|y_n| \, |b|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n| \, |a|}{|y_n| \, |b|}. \tag{8}$$

Теперь уже удобно использовать теорему 2 предыдущего параграфа, в силу которой

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} \quad (n > N_1) \tag{9}$$

для достаточно большого N_1. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon |b|}{4} \quad (n > N_2), \tag{10}$$

$$|a||y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4} \quad (n > N_3). \tag{11}$$

Тогда, положив $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, будем в силу (8)—(11) иметь

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon |b|}{4} \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (n > N),$$

что доказывает равенство (3).

Заметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях равенств (1)—(3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы x_n и y_n. Например, если $x_n = y_n = n$, то x_n и y_n не имеют (конечных) пределов, в то время как $\lim (x_n - y_n) = 0$, $\lim x_n/y_n = 1$.

Теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного во многих случаях дают возможность узнать, имеет ли переменная предел и чему он равен, если она есть результат конечного числа арифметических действий над несколькими другими переменными, существование и величина пределов которых известны.

Однако часто встречаются случаи, выходящие за границы применимости доказанных теорем, и здесь остается большое поле для инициативы математика.

§ 3.3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Переменная α_n, имеющая предел, равный нулю, называется *бесконечно малой величиной* или, короче *бесконечно малой*.

Таким образом, переменная α_n есть бесконечно малая, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ $(n > N)$.

Нетрудно видеть, что *для того, чтобы переменная x_n имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая.*

Переменная β_n называется *бесконечно большой величиной* или просто *бесконечно большой*, если для любого $M > 0$ найдется такое N, что $|\beta_n| > M$ $(n > N)$. При этом пишут

$$\lim \beta_n = \infty \quad \text{или} \quad \beta_n \to \infty, \tag{1}$$