Теперь уже удобно использовать теорему 2 предыдущего параграфа, в силу которой

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} \quad (n > N_1) \tag{9}$$

для достаточно большого N_1. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon |b|}{4} \quad (n > N_2), \tag{10}$$

$$|a||y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4} \quad (n > N_3). \tag{11}$$

Тогда, положив $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, будем в силу (8)—(11) иметь

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{\varepsilon |b|}{4} \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (n > N),$$

что доказывает равенство (3).

Заметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях равенств (1)—(3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы x_n и y_n. Например, если $x_n = y_n = n$, то x_n и y_n не имеют (конечных) пределов, в то время как $\lim (x_n - y_n) = 0$, $\lim x_n/y_n = 1$.

Теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного во многих случаях дают возможность узнать, имеет ли переменная предел и чему он равен, если она есть результат конечного числа арифметических действий над несколькими другими переменными, существование и величина пределов которых известны.

Однако часто встречаются случаи, выходящие за границы применимости доказанных теорем, и здесь остается большое поле для инициативы математика.

§ 3.3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Переменная α_n, имеющая предел, равный нулю, называется *бесконечно малой величиной* или, короче *бесконечно малой*.

Таким образом, переменная α_n есть бесконечно малая, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ $(n > N)$.

Нетрудно видеть, что *для того, чтобы переменная x_n имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая.*

Переменная β_n называется *бесконечно большой величиной* или просто *бесконечно большой*, если для любого $M > 0$ найдется такое N, что $|\beta_n| > M$ $(n > N)$. При этом пишут

$$\lim \beta_n = \infty \text{ или } \beta_n \to \infty, \tag{1}$$

и говорят, что β_n *стремится к бесконечности.* Такая терминология считается удобной, несмотря на то, что знак ∞ не обозначает никакого числа и *бесконечно большая заведомо ни к какому конечному пределу (числу) не стремится.*

Если бесконечно большая β_n начиная с некоторого N принимает только положительные значения или только отрицательные значения, то пишут

$$\lim \beta_n = +\infty \text{ или } \beta_n \to +\infty, \tag{2}$$

соответственно

$$\lim \beta_n = -\infty \text{ или } \beta_n \to -\infty. \tag{3}$$

Таким образом, из (2), так же как и из (3), следует (1). Пример переменной $\{(-1)^n n\}$ показывает, что может иметь место соотношение (1), в то время как не имеет места ни (2) ни (3).

Отметим следующие очевидные свойства:

1. *Если переменная x_n ограничена, а y_n — бесконечно большая, то $x_n/y_n \to 0$.*

2. *Если абсолютная величина x_n ограничена снизу положительным числом, а y_n — неравная нулю бесконечно малая, то $x_n/y_n \to \infty$.*

Докажем только второе свойство.

Дано, что для некоторого числа $a > 0$ имеет место неравенство $|x_n| > a$, $n = 1, 2, \ldots$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$|y_n| < \varepsilon \quad (n > N). \tag{4}$$

Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = M \quad (n > N).$$

Зададим произвольное положительное число M и подберем по нему ε так, чтобы $M = a/\varepsilon$, а по ε подберем такое N, чтобы имело место свойство (4). Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > M \quad (n > N),$$

что и требовалось доказать.

Из высказанных двух утверждений получаются следующие следствия:

$$\lim_{y_n \to \infty} \frac{c}{y_n} = 0, \quad \lim_{y_n \to 0} \frac{c}{y_n} = \infty \quad (c \neq 0).$$

Множества (M, ∞), $(-\infty, M)$, $\{x : |x| > M\}$, где M — произвольное число, называются соответственно *окрестностями «точек»* $-\infty$, $+\infty$, ∞.

Пусть $a \geqslant 0$ и k — натуральное число. Под выражением $\sqrt[k]{a}$ мы будем понимать, если это не будет оговорено особо *), арифметическое значение корня k-й степени из a, т. е. неотрицательное число, k-я степень которого равна a. Оно существует и единственно. Это нам будет удобно доказать позже (в конце § 4.5). Но уже сейчас мы будем этим фактом пользоваться. Так поступают в элементарной математике — не обосновывают логически существование корней, но доказывают их свойства **).

Примеры.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, потому что неравенства $\sqrt[k]{n} > N$ и $n > N^k$, где $N > 0$, вытекают одно из другого, и поэтому для любого N можно указать такое n_0 (именно, $n_0 > N^k$), что для всех $n > n_0$ будет $\sqrt[k]{n} > N$.

2. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Действительно, $\sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$. Поэтому ***) $n = (1 + \varepsilon_n)^n > 1 + \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varepsilon_n^2$, откуда $\varepsilon_n^2 < \dfrac{2}{n-1}$ и (см. пример 1) $\varepsilon_n < \sqrt{2}/\sqrt{n-1} \to 0$ $(n\to\infty)$.

3. При $a > 1$ и натуральном k $\lim\limits_{n\to\infty}(n^k/a^n) = 0$, потому что, если ли положить $a = 1 + \varepsilon$, то $\varepsilon > 0$ и при $n > k$

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}}\,\frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k)} =$$
$$= \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)}\,\frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

§ 3.4. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности

Не всякая переменная имеет предел. Часто бывает важно знать, существует ли у данной переменной предел? Следующая теорема дает очень простой признак существования предела переменной.

Теорема 1. *Пусть переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ не убывает (не возрастает), т. е. удовлетворяет условию $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, \ldots$ Если она ограничена сверху (снизу) числом B (соответственно A), то существует предел $\lim x_n$, равный некоторому числу M (соответственно m), удовлетворяющему неравенству $M \leqslant B$ (соответственно $A \leqslant m$). Если же она не ограничена сверху (снизу), то $\lim x_n = +\infty$ ($\lim x_n = -\infty$).*

---

*) При $k > 2$ есть и комплексные корни k-й степени из a.

**) Имеются в виду свойства, перечисленные в § 4.6 (до § 4.6 (1)).

***) Мы здесь воспользовались формулой Ньютона. Ее элементарный вывод теперь не входит в нашу школьную программу, но его можно найти во всех старых учебниках алгебры. Этот вывод, основанный на понятии производной от x^n, см. в § 5.9, пример 1.