Пусть $a \geqslant 0$ и k — натуральное число. Под выражением $\sqrt[k]{a}$ мы будем понимать, если это не будет оговорено особо *), арифметическое значение корня k-й степени из a, т. е. неотрицательное число, k-я степень которого равна a. Оно существует и единственно. Это нам будет удобно доказать позже (в конце § 4.5). Но уже сейчас мы будем этим фактом пользоваться. Так поступают в элементарной математике — не обосновывают логически существование корней, но доказывают их свойства **).

Примеры.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, потому что неравенства $\sqrt[k]{n} > N$ и $n > N^k$, где $N > 0$, вытекают одно из другого, и поэтому для любого N можно указать такое n_0 (именно, $n_0 > N^k$), что для всех $n > n_0$ будет $\sqrt[k]{n} > N$.

2. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Действительно, $\sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$. Поэтому ***) $n = (1+\varepsilon_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\varepsilon_n^2$, откуда $\varepsilon_n^2 < \frac{2}{n-1}$ и (см. пример 1) $\varepsilon_n < \sqrt{2}/\sqrt{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$.

3. При $a > 1$ и натуральном k $\lim\limits_{n\to\infty} (n^k/a^n) = 0$, потому что, если ли положить $a = 1 + \varepsilon$, то $\varepsilon > 0$ и при $n > k$

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}} \frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k)} =$$
$$= \frac{(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)} \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

§ 3.4. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности

Не всякая переменная имеет предел. Часто бывает важно знать, существует ли у данной переменной предел? Следующая теорема дает очень простой признак существования предела переменной.

Теорема 1. *Пусть переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ не убывает (не возрастает), т. е. удовлетворяет условию $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$) для любого $n = 1, 2, \ldots$ Если она ограничена сверху (снизу) числом B (соответственно A), то существует предел $\lim x_n$, равный некоторому числу M (соответственно m), удовлетворяющему неравенству $M \leqslant B$ (соответственно $A \leqslant m$). Если же она не ограничена сверху (снизу), то $\lim x_n = +\infty$ ($\lim x_n = -\infty$).*

---

*) При $k > 2$ есть и комплексные корни k-й степени из a.

**) Имеются в виду свойства, перечисленные в § 4.6 (до § 4.6 (1)).

***) Мы здесь воспользовались формулой Ньютона. Ее элементарный вывод теперь не входит в нашу школьную программу, но его можно найти во всех старых учебниках алгебры. Этот вывод, основанный на понятии производной от x^n, см. в § 5.9, пример 1.

Доказательство. Пусть переменная x_n ограничена сверху числом B и не убывает.

Если $x_1 > 0$, то и $x_n > 0$ для $n = 1, 2, \ldots$. В этом случае теорема уже была доказана (см. § 2.4, свойство V). Ее утверждение было выбрано в качестве одного из основных свойств действительных чисел. При аксиоматическом подходе это утверждение может быть принято как аксиома V действительного числа наряду с аксиомами I—IV (см. конец § 2.1).

Пусть теперь $x_1 \leqslant 0$ и $c > |x_1|$. Переменная $y_n = x_n + c$ $(n = 1, 2, \ldots)$ очевидно принимает положительные значения $(y_n > 0)$, не убывает $(y_n \leqslant y_{n+1})$ и ограничена сверху числом $B + c$ $(y_n \leqslant B + c)$. Поэтому на основании уже доказанного существует предел

$$\lim y_n = y_0 \leqslant B + c.$$

Но тогда существует также предел

$$M = \lim x_n = \lim (y_n - c) = y_0 - c \leqslant B.$$

Пусть теперь неубывающая переменная x_n не ограничена сверху. Тогда, как бы ни было велико положительное число N, найдется такое n_0, что $N < x_{n_0}$. Но в силу того, что x_n не убывает,

$$x_{n_0} \leqslant x_n \text{ для } n > n_0.$$

Таким образом, каково бы ни было положительное число N, найдется такое n_0, что

$$N < x_n \text{ для } n > n_0,$$

а это и значит, что $\lim x_n = +\infty$.

Для невозрастающей переменной x_n теорема доказывается аналогично. Но можно свести вопрос к уже доказанному. Так как x_n не возрастает и ограничена снизу, то $-x_n$ не убывает и ограничена сверху числом $-A$, поэтому существует $\lim (-x_n) \leqslant -A$, а с ним и предел $\lim x_n$, равный

$$m = \lim x_n = -\lim (-x_n) \geqslant A.$$

Пример 1. Переменная q^n $(n = 1, 2, \ldots)$, где $0 < q < 1$, удовлетворяет условию $q^{n+1} < q^n$, т. е. она монотонно убывает, кроме того, она ограничена снизу, потому что $0 < q^n$ для любого n. Поэтому согласно теореме 1 существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = A$.

Очевидно, что q^{n+1} должна иметь тот же предел A, но

$$\lim q^{n+1} = q \lim q^n = qA \quad \text{и} \quad A = qA.$$

Так как $q \neq 1$, то это может быть лишь если $A = 0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (0 < q < 1).$$

Отсюда следует, что для $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/a)^n} = +\infty.$$

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

В силу равенства $|a^n/n!| = |a|^n/n!$ достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Пусть m — натуральное число такое, что $m+1 > a$. Тогда (см. пример 1)

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

§ 3.5. Число e

Рассмотрим переменную

$$\alpha(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$\alpha(n) = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

и, аналогично,

$$\alpha(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

Члены $\alpha(n)$ меньше соответствующих членов $\alpha(n+1)$ и, кроме того, $\alpha(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше, чем $\alpha(n)$. Поэтому $\alpha(n) < \alpha(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает.

Далее,

$$\alpha(n) = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3.$$

Это показывает, что переменная $\alpha(n)$ ограничена сверху.

Таким образом, переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме 1 она имеет предел, который не превышает 3.

Этот предел — вполне определенное число, которое называют *числом e*. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{1}$$

Число e имеет большое значение в математическом анализе. Мы убедимся в этом скоро. В известном смысле оно является естественным основанием для логарифмов. Число e называется еще *неперовым числом* по имени шотландского математика Д. Не-