Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

В силу равенства $|a^n/n!|=|a|^n/n!$ достаточно рассмотреть случай $a>0$. Пусть m — натуральное число такое, что $m+1>a$. Тогда (см. пример 1)

$$\frac{a^n}{n!}<\frac{a^m}{m!}\left(\frac{a}{m+1}\right)^{n-m}\to 0\quad (n\to\infty).$$

§ 3.5. Число e

Рассмотрим переменную

$$\alpha(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad (n=1,2,\ldots).$$

Имеем

$$\alpha(n)=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\ldots=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

и, аналогично,

$$\alpha(n+1)=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots$$

Члены $\alpha(n)$ меньше соответствующих членов $\alpha(n+1)$ и, кроме того, $\alpha(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше, чем $\alpha(n)$. Поэтому $\alpha(n)<\alpha(n+1)$ $(n=1,2,\ldots)$ и переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает.

Далее,

$$\alpha(n)=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots<$$

$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<2+1=3.$$

Это показывает, что переменная $\alpha(n)$ ограничена сверху.

Таким образом, переменная $\alpha(n)$ монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме 1 она имеет предел, который не превышает 3.

Этот предел — вполне определенное число, которое называют *числом e*. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{1}$$

Число e имеет большое значение в математическом анализе. Мы убедимся в этом скоро. В известном смысле оно является естественным основанием для логарифмов. Число e называется еще *неперовым числом* по имени шотландского математика Д. Непера (1550—1617). Это — иррациональное число. Ниже приводится его значение с первыми шестью точными десятичными знаками:

$$e = 2{,}718281\ldots$$

В § 5.10 показано, как вычислить число e с наперед заданной точностью.

В дальнейшем, когда будет введено понятие предела функции, мы увидим, что указанный предел существует и равен e, когда n стремится к бесконечности любого знака, изменяясь непрерывно.

§ 3.6. Леммы о вложенных отрезках, существовании точных граней множества и сечения во множестве действительных чисел

Лемма 1. *Пусть задана последовательность отрезков (множеств чисел x, для которых $a_n \leqslant x \leqslant b_n$)*

$$\sigma_n = [a_n,\ b_n] \qquad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

вложенных друг в друга, т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Тогда существует, и притом единственная, точка (число), одновременно принадлежащая всем отрезкам σ_n.

Доказательство. Очевидно, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant b_m$ при любом заданном m. Это показывает, что числа a_n не убывают и ограничены сверху числом b_m при любом m, и согласно теореме 1 § 3.4 существует число c, к которому стремится последовательность a_n, при этом $a_n \leqslant c \leqslant b_m$. Так как в этих неравенствах n и m произвольны, то, в частности,

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

следовательно, $c \in \sigma_n$, каково бы ни было n.

Найденная точка c — единственная, удовлетворяющая сформулированному свойству. Ведь если допустить существование другой такой точки c_1, то выполнялись бы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $a_n \leqslant c_1 \leqslant b_n$, откуда $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c| = \varepsilon > 0$ для любого n. Но это противоречило бы тому, что $b_n - a_n \to 0$.

Лемма 2. *У ограниченного сверху (снизу) числом M (числом m) множества действительных чисел существует точная верхняя (нижняя) грань, не превышающая (не меньшая) $M(m)$.*

Доказательство. Пусть E есть произвольное ограниченное сверху числом M множество действительных чисел (точек) и пусть x_0 — какая-либо точка E.

Зададим отрезок $[a, M]$, где $a < x_0$, который обозначим через σ_0. Разделим σ_0 на два равных отрезка и обозначим через σ_1 правый из них, если он содержит в себе точки E, в противном слу-