пера (1550—1617). Это — иррациональное число. Ниже приводится его значение с первыми шестью точными десятичными знаками:

$$e = 2{,}718281\ldots$$

В § 5.10 показано, как вычислить число e с наперед заданной точностью.

В дальнейшем, когда будет введено понятие предела функции, мы увидим, что указанный предел существует и равен e, когда n стремится к бесконечности любого знака, изменяясь непрерывно.

§ 3.6. Леммы о вложенных отрезках, существовании точных граней множества и сечения во множестве действительных чисел

Лемма 1. *Пусть задана последовательность отрезков (множеств чисел x, для которых $a_n \leqslant x \leqslant b_n$)*

$$\sigma_n = [a_n,\ b_n] \qquad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

вложенных друг в друга, т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Тогда существует, и притом единственная, точка (число), одновременно принадлежащая всем отрезкам σ_n.

Доказательство. Очевидно, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant b_m$ при любом заданном m. Это показывает, что числа a_n не убывают и ограничены сверху числом b_m при любом m, и согласно теореме 1 § 3.4 существует число c, к которому стремится последовательность a_n, при этом $a_n \leqslant c \leqslant b_m$. Так как в этих неравенствах n и m произвольны, то, в частности,

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

следовательно, $c \in \sigma_n$, каково бы ни было n.

Найденная точка c — единственная, удовлетворяющая сформулированному свойству. Ведь если допустить существование другой такой точки c_1, то выполнялись бы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $a_n \leqslant c_1 \leqslant b_n$, откуда $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c| = \varepsilon > 0$ для любого n. Но это противоречило бы тому, что $b_n - a_n \to 0$.

Лемма 2. *У ограниченного сверху (снизу) числом M (числом m) множества действительных чисел существует точная верхняя (нижняя) грань, не превышающая (не меньшая) $M(m)$.*

Доказательство. Пусть E есть произвольное ограниченное сверху числом M множество действительных чисел (точек) и пусть x_0 — какая-либо точка E.

Зададим отрезок $[a,\ M]$, где $a < x_0$, который обозначим через σ_0. Разделим σ_0 на два равных отрезка и обозначим через σ_1 правый из них, если он содержит в себе точки E, в противном случае обозначим через σ_1 левый отрезок. Разделим σ_1 на два равных отрезка и обозначим через σ_2 правый из них, если он содержит точки E, в противном случае берем в качестве σ_2 левый отрезок. Продолжив этот процесс по индукции, получим последовательность вложенных отрезков $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$ таких, что их длины стремятся к нулю и при любом n отрезок σ_n содержит в себе точки E, но правее σ_n нет точек E. Согласно лемме 1 существует, и притом единственная, точка c, принадлежащая всем σ_n. Очевидно, что $c \leqslant M$. Докажем, что

$$\sup E = c.$$

Для этого покажем, что выполняются два условия:

1) $x \leqslant c$ для всех $x \in E$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in E$ такое, что

$$c - \varepsilon < x_1 \leqslant c. \tag{1}$$

Если бы утверждение 1) не было верно, то существовала бы точка $y \in E$ такая, что $c < y$. Так как отрезки σ_n содержат в себе c и длины их стремятся к нулю, то найдется n такое, что точка y будет правее σ_n. Но этого не может быть, потому, что по построению правее σ_n нет точек E. Этим доказано условие 1).

Зададим теперь $\varepsilon > 0$. Очевидно найдется n такое, что σ_n окажется правее точки $c - \varepsilon$. При этом в σ_n имеется по крайней мере одна точка, которую обозначим через x_1, принадлежащая E. Для нее выполняются неравенства (1).

Если теперь E есть ограниченное снизу числом m множество точек x, то соответствующее множество точек $-x$ ограничено сверху числом $-m$, и так как последнее имеет точную верхнюю грань, которая не превышает $-m$, то существует

$$\inf_{x \in E} x = -\sup_{x \in E} (-x) \geqslant m.$$

Лемма 3. *Если множество R всех действительных чисел разбито на два непересекающихся непустых множества,*

$$R = A + B,$$

так, что всякое $a \in A$ меньше всякого $b \in B$, то либо существует число c, наибольшее в A, и тогда в B нет наименьшего числа, либо существует число c, наименьшее в B, и тогда в A нет наибольшего числа.

Доказательство. Пусть множество R всех действительных чисел разбито на два класса A и B, как это сказано в формулировке леммы. Пусть b — число, принадлежащее B. Тогда $a < b$ для всех $a \in A$, и в силу леммы 2 существует точная верхняя грань

$$\sup_{a \in A} a = c \leqslant b. \tag{2}$$

Число c по условию принадлежит одному из классов A или B.

Если $c \in A$, то очевидно, что c есть наибольшее число в классе A. Допустим, что наряду с этим в B есть наименьшее число, которое обозначим через b_0. Тогда среднее арифметическое

$$(c + b_0)/2 = d < b_0,$$

и потому $d \in A$ (ведь b_0 — наименьшее число в классе B). С другой стороны, $c < d$ и вследствие (2) d не может принадлежать A, и мы пришли к противоречию.

Если теперь допустить, что $c \in B$, то аналогичными рассуждениями легко устанавливается, что c есть наименьшее число в классе B, и тогда в A нет наибольшего числа. Этим лемма 3 доказана.

З а м е ч а н и е. В нашем распоряжении имеется четыре внешне отличных, но по существу весьма близких утверждения:

1) Лемма 1 — о вложенных отрезках.

2) Лемма 2 — о существовании точной верхней грани у ограниченного множества.

3) Лемма 3 — о сечении во множестве действительных чисел.

4) Теорема 1, § 3.4 — о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

В нашем изложении утверждение 4) представляет собой одно из основных свойств действительных чисел — свойство V. С помощью этого свойства (и свойств I—IV) мы доказали утверждения 1), 2), 3).

На самом деле утверждения 1), 2), 3), 4) (при наличии I—IV) эквивалентны. Любое из них влечет за собой, как нетрудно проверить, верность остальных.

§ 3.7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы

Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Из нее можно выделить бесконечным числом способов новую последовательность

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\},$$

где индекс n_k пробегает возрастающую последовательность (бесконечную!) натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

Нас здесь будут интересовать только подпоследовательности, которые сходятся либо к конечному числу, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$ (т. е. имеют предел конечный, $+\infty$ или $-\infty$). Их мы будем называть *сходящимися*, а их пределы — *числами* (*конечными* или *бесконечными*), распространяя, таким образом, название «число» и на символы $-\infty$ и $+\infty$. Мы считаем, что $-\infty < \alpha < +\infty$, где α — любое действительное (конечное) число. В силу этого соглашения $+\infty$ есть *наибольшее число*, а $-\infty$ *наимень-*