Если $c \in A$, то очевидно, что c есть наибольшее число в классе A. Допустим, что наряду с этим в B есть наименьшее число, которое обозначим через b_0. Тогда среднее арифметическое

$$(c+b_0)/2 = d < b_0,$$

и потому $d \in A$ (ведь b_0 — наименьшее число в классе B). С другой стороны, $c < d$ и вследствие (2) d не может принадлежать A, и мы пришли к противоречию.

Если теперь допустить, что $c \in B$, то аналогичными рассуждениями легко устанавливается, что c есть наименьшее число в классе B, и тогда в A нет наибольшего числа. Этим лемма 3 доказана.

Замечание. В нашем распоряжении имеется четыре внешне отличных, но по существу весьма близких утверждения:

1) Лемма 1 — о вложенных отрезках.

2) Лемма 2 — о существовании точной верхней грани у ограниченного множества.

3) Лемма 3 — о сечении во множестве действительных чисел.

4) Теорема 1, § 3.4 — о существовании предела монотонной ограниченной последовательности.

В нашем изложении утверждение 4) представляет собой одно из основных свойств действительных чисел — свойство V. С помощью этого свойства (и свойств I—IV) мы доказали утверждения 1), 2), 3).

На самом деле утверждения 1), 2), 3), 4) (при наличии I—IV) эквивалентны. Любое из них влечет за собой, как нетрудно проверить, верность остальных.

§ 3.7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы

Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Из нее можно выделить бесконечным числом способов новую последовательность

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\},$$

где индекс n_k пробегает возрастающую последовательность (бесконечную!) натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

Нас здесь будут интересовать только подпоследовательности, которые сходятся либо к конечному числу, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$ (т. е. имеют предел конечный, $+\infty$ или $-\infty$). Их мы будем называть *сходящимися*, а их пределы — *числами* (*конечными* или *бесконечными*), распространяя, таким образом, название «число» и на символы $-\infty$ и $+\infty$. Мы считаем, что $-\infty < \alpha < +\infty$, где α — любое действительное (конечное) число. В силу этого соглашения $+\infty$ есть *наибольшее число*, а $-\infty$ *наимень-*

щее. Для расширенного таким образом множества чисел, очевидно, выполняются аксиомы числа группы I (см. § 2.4).

Предупредим читателя, что в наших рассуждениях весьма существенно, что элементы x_n (не числа x_n!) последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным индексам n. Надо различать числа (точки), которые пробегаются последовательностью, от ее элементов.

Например, последовательность

$$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ \ldots \tag{1}$$

(как и всякая последовательность) состоит из бесконечного числа элементов x_1, x_2, x_3, ..., но она пробегает весьма бедное множество чисел $\{1, 2, 3\}$, состоящее только из трех чисел (точек).

Легко видеть, что если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность тоже сходится и притом к тому же числу (конечному, $+\infty$, $-\infty$). Но из того, что последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность не следует, что сама она сходится.

Но справедлива теорема, имеющая большое применение. Ее часто называют теоремой Вейерштрасса:

Теорема 1. *Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу (конечному).*

Доказательство. Пусть значения x_n нашей последовательности принадлежат отрезку $\Delta_0 = [c, d]$. Разделим его на две половинки и обозначим через Δ_1 самую правую из них, содержащую в себе бесконечное число элементов x_n.

Это надо понимать в том смысле, что если обе указанные половинки содержат в себе бесконечное число элементов, то Δ_1 есть правая из них, а если только одна из них содержит бесконечное число элементов x_n, то именно она и обозначается через Δ_1.

Пусть x_{n_1} — один из элементов отрезка Δ_1. Обозначим далее через Δ_2 самую правую половину отрезка Δ_1, содержащую в себе бесконечное число элементов x_n. Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_2} с $n_2 > n_1$. Вообще, если отрезки $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_{k-1}$ и принадлежащие соответственно им элементы $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$ уже определены, то обозначим через Δ_k самую правую половину отрезка Δ_{k-1}, содержащую в себе бесконечное множество элементов x_n. Очевидно, что среди последних найдется элемент x_{n_k} с $n_k > n_{k-1}$. Обозначим через a точку, принадлежащую всем Δ_k ($k = 1, 2, \ldots$). Очевидно, определенная нами подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к a.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Из любой последовательности действительных чисел (ограниченной или неограниченной) можно выделить под-*

последовательность, сходящуюся к конечному числу, $+\infty$ *или* $-\infty$.

В самом деле, это утверждение для ограниченной последовательности уже доказано в теореме 1 и тогда соответствующая подпоследовательность сходится к конечному числу. Если же последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), то для любого натурального k найдется очевидно натуральное n_k такое, что $k < x_{n_k}$ $(x_{n_k} < -k)$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$.

Докажем часто употребляемую в анализе теорему.

Теорема 3. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что ее любая подпоследовательность содержит в свою очередь подпоследовательность, сходящуюся к одному и тому же числу* A *(конечному,* $+\infty$ *или* $-\infty$*), то существует предел* $\lim x_n = A$.

В самом деле, если бы последовательность $\{x_n\}$ не стремилась к A, то существовала бы окрестность A, вне которой имелось бы бесконечное число элементов x_n. Перенумеровав эти элементы в порядке возрастания n, получаем некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Из последней на основании предыдущей теоремы можно выделить ее подпоследовательность $\{x_{n_{k'}}\}$, стремящуюся к некоторому числу B (конечному, $+\infty$ или $-\infty$), очевидно, заведомо не равному A. Мы получили противоречие, потому что последовательность $\{x_{n_{k'}}\}$ является подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}$ и по условию стремится к A.

3.7.1 *). Введем теперь определение: число α (конечное, $+\infty$ или $-\infty$) называется *верхним (нижним) пределом последовательности действительных чисел* $\{x_n\}$ (или *переменной* x_n), если существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к нему, и при этом всякая другая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к числу не большему (не меньшему) чем α.

Например, последовательность (1), очевидно, имеет верхний предел, равный 3, и нижний предел, равный 1, а последовательность 1, -2, 3, $-4, \ldots$ имеет верхний предел $+\infty$ и нижний, равный $-\infty$.

Верхний и нижний пределы последовательности обозначаются соответственно через $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$ или еще так: $\limsup x_n$, $\liminf x_n$ (см. в конце параграфа упражнение).

Последовательность x_n *может иметь только один верхний (нижний) предел,* потому что если допустить, что a_1 и a_2 — два

*) Пункт 3.7.1 посвящен верхним и нижним пределам, которые в этой книге используются только в теории рядов (§ 11.3, теоремы 2, 3, § 11.11, теоремы 1—3).

такие предела и $a_1 < a_2$, то существовала бы подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к a_2, что противоречит тому факту, что a_1 есть верхний предел.

Отметим, что метод вложенных друг в друга отрезков, который мы применили при доказательстве теоремы 1, привел нас к подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к числу a, которое равно верхнему пределу последовательности $\{x_n\}$:

$$a = \overline{\lim}\, x_n.$$

В самом деле, пусть $a' > a$. Подберем n настолько большим, что a' оказывается правее Δ_n. Но правее Δ_n может быть только конечное число элементов x_n и, следовательно, не существует подпоследовательности $\{x_n\}$, которая бы сходилась к числу a'.

Таким образом, указанный процесс доказывает существование верхнего предела у ограниченной последовательности.

Если бы мы наш процесс видоизменили, обозначая через Δ_n для каждого n не самую правую, а самую левую половину Δ_{n-1}, содержащую бесконечное число элементов x_n, то в результате получили бы число a (точку), равное нижнему пределу последовательности $\{x_n\}$.

Покажем, что верхний (нижний) предел ограниченной последовательности $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: *для любого $\varepsilon > 0$ интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ содержит в себе бесконечное число элементов x_n, при этом справа (слева) от этого интервала имеется не более, чем конечное число элементов x_n.*

В самом деле, можно указать такое n, что $\Delta_n \subset (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, но в Δ_n имеется бесконечное число элементов x_n — тем более в $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$; правее (левее) же Δ_n имеется не более чем конечное число элементов x_n — тем более правее (левее) интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

Для ограниченной последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел это свойство верхнего (нижнего) предела может служить другим эквивалентным его определением.

Действительно, в случае, например, верхнего предела, если число a обладает этим свойством и $a' > a$, то взяв ε так, чтобы было $a < a+\varepsilon < a'$, получим, что правее $a+\varepsilon$ имеется не более чем конечное число элементов x_n и, следовательно, не может существовать подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к a'. Но подпоследовательность, сходящаяся к a, существует; чтобы получить ее, фиксируем $\varepsilon > 0$ и подбираем n_1 так, чтобы $x_{n_1} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Затем подбираем $n_2 > n_1$ так, чтобы $x_{n_2} \in \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, что возможно, так как интервал $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ содержит бесконечное число элементов x_n. Затем подбираем $n_3 > n_2$ так, чтобы $x_{n_3} \in \left(a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ и т. д. Очевидно, $x_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.

Если последовательность не ограничена сверху, то, очевидно, можно выделить из нее подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$, и так как $+\infty$ больше любого числа, то

$$\overline{\lim}\, x_n = +\infty.$$

Если последовательность ограничена сверху конечным числом, которое обозначим через b, но не ограничена снизу, то возможны два случая:

1-й случай. Найдется такое конечное число $a < b$, что неравенства $a \leqslant x_n \leqslant b$ удовлетворяются для бесконечного числа индексов n. Таким образом, из этих индексов, если их расположить в возрастающем порядке, образуется бесконечная подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\} = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$. Последней соответствует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ нашей последовательности, очевидно, ограниченная. Существование ее верхнего предела уже доказано. Легко видеть, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, x_{n_k},$$

и мы доказали существование $\overline{\lim}\, x_n$ и в этом случае.

2-й случай. Для любого $a \leqslant b$ неравенство $a \leqslant x_n \leqslant b$ или, что в данном случае все равно, неравенство $a \leqslant x_n$, выполняется для конечного числа индексов n. Это значит, очевидно, что

$$\lim x_n = -\infty.$$

Но тогда и верхний предел $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ (так же как нижний!), т. е. он и в этом последнем случае существует.

Объединяя эти результаты с установленными выше результатами для ограниченной последовательности, получим:

Теорема 4. *Любая последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ имеет верхний (нижний) предел (равный конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$).*

Если последовательность ограничена, то ее верхний и нижний пределы конечны.

Теорема 5. *Всегда $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$, и равенство в этом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда существует предел x_n (конечный, $+\infty$ или $-\infty$), и тогда*

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n. \tag{2}$$

В самом деле, если существует предел x_n, то все подпоследовательности $\{x_n\}$ сходятся к нему, и поэтому имеет место (2).

Наоборот, пусть

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = A. \qquad (3)$$

Если A — конечное число, то из (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенства

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$$

соблюдаются для всех индексов n, за исключением конечного их числа, а это значит, что $x_n \to A$. Если теперь $A = +\infty$, то неравенству $x_n \leqslant M$ может при любом конечном M удовлетворять только конечное число элементов x_n, но тогда $\lim x_n = +\infty$. Аналогично рассматривается случай $A = -\infty$.

Отметим очевидное равенство

$$\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}\,(-x_n). \qquad (4)$$

Справедливы неравенства (правые части конечны)

$$\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n, \qquad (5)$$

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n, \qquad (6)$$

где переменные x_n и y_n ограничены. Неравенство (5) доказывается так: найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ такая, что

$$\overline{\lim}\,(x_n + y_n) = \lim\left(x_{n_k} + y_{n_k}\right); \qquad (7)$$

можно далее из $\{n_k\}$ выбрать подпоследовательность $\{n_k'\}$ такую, что существует предел $\lim x_{n_k'}$. Далее, из подпоследовательности $\{n_k'\}$ можно выбрать в свою очередь ее подпоследовательность $\{n_k''\}$ такую, что $\lim y_{n_k''}$ существует, но тогда, очевидно, и $\lim x_{n_k''}$ будет существовать. Поэтому

$$\lim\left(x_{n_k} + y_{n_k}\right) = \lim\left(x_{n_k''} + y_{n_k''}\right) =$$
$$= \lim x_{n_k''} + \lim y_{n_k''} \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует (5).

В силу (4) и (5)

$$\underline{\lim}\,(x_n + y_n) = -\overline{\lim}\,(-x_n + (-y_n)) \geqslant$$
$$\geqslant -(\overline{\lim}\,(-x_n) + \overline{\lim}\,(-y_n)) = \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n,$$

т. е. справедливо (6).

Теорема 6. *Пусть A — конечное положительное число и существует предел* $\lim x_n = A$ и $\{y_n\}$ — любая последовательность.

Тогда

$$\overline{\lim}\,(x_n y_n) = A\,\overline{\lim}\,y_n. \tag{9}$$

В частности,

$$\overline{\lim}\,(A y_n) = A\,\overline{\lim}\,y_n. \tag{10}$$

Здесь считается $A\cdot(+\infty) = +\infty$ и $A\cdot(-\infty) = -\infty$.

Доказательство. Будем считать, что $\{y_{n_k}\}$ есть произвольная сходящаяся (к конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$) подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$. Тогда $\{x_{n_k}y_{n_k}\}$ автоматически будет произвольной сходящейся подпоследовательностью последовательности $\{x_n y_n\}$. Поэтому

$$A\lim y_{n_k} = \lim\left(x_{n_k}y_{n_k}\right) \leqslant \overline{\lim}\,(x_n y_n),$$

следовательно,

$$A\,\overline{\lim}\,y_n \leqslant \overline{\lim}\,(x_n y_n). \tag{11}$$

С другой стороны,

$$\lim\left(x_{n_k}y_{n_k}\right) = A\lim y_{n_k} \leqslant A\,\overline{\lim}\,y_n,$$

следовательно,

$$\overline{\lim}\,(x_n y_n) \leqslant A\,\overline{\lim}\,y_n. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует (9).

Пример. Последовательность

$$E = \{\sin n\alpha\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

в случае, если $\alpha = \lambda\pi$, где $\lambda = p/q$ рационально $(p,\ q > 0)$, носит периодический характер:

$$\sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \ldots,\ \sin 2q\alpha,\ \sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \ldots \tag{13}$$

Пределы различных сходящихся ее подпоследовательностей могут быть равны только одному из первых $2q$ чисел (13). Наибольшее из них, очевидно, есть $\overline{\lim}\,\sin n\alpha$, а наименьшее есть $\underline{\lim}\,\sin n\alpha$.

Пусть теперь $\lambda > 0$ иррационально. Будем отмечать числа $n\alpha$ на единичной окружности γ, как это принято в тригонометрии. Тогда, каковы бы ни были различные натуральные числа n_1 и n_2, точки $n_1\alpha$ и $n_2\alpha$ геометрически различны, так как в противном случае имело бы место равенство

$$n_2\alpha = n_1\alpha + 2k\pi, \qquad \alpha = \lambda\pi,$$

где k — целое, т. е. $(n_2 - n_1)\lambda = 2k$ и λ было бы рациональным. Следовательно, точки $n\alpha$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ образуют бесконечное множество, которое мы обозначим через $\mathfrak{M}$. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара точек $n_1\alpha$, $n_2\alpha$, геометрически отстоящих друг от друга (вдоль γ) на расстоянии меньшем, чем ε. Это значит, что

$$(n_2 - n_1)\alpha = 2k\pi + \omega = \beta \qquad (n_1 < n_2),$$

где $|\omega| < \varepsilon$, а k — целое.

Точки $0,\ \beta,\ 2\beta,\ 3\beta,\ \ldots$ принадлежат, очевидно, $\mathfrak{M}$. Кроме того, любые рядом стоящие точки этой последовательности находятся на равном расстоянии, меньшем, чем ε. Отсюда следует, что какова бы ни была точка $t \in \gamma$, на γ существует на расстоянии (вдоль γ) меньшем, чем ε, точка множества $\mathfrak{M}$. Это показывает, что любая точка $t \in \gamma$ есть предельная точка множества $\mathfrak{M}$.

Из сказанного следует, что каково бы ни было t, всегда можно подобрать подпоследовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \sin n_k\alpha = \sin t.$$

Но $\sin t$ пробегает все значения отрезка $[-1, +1]$; отсюда следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sin n\alpha = -1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sin n\alpha = 1.$$

Упражнение. Доказать, что для любой переменной x_n

$$\varlimsup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k, \quad \varliminf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k>n} x_k.$$

Указание. Для неограниченной сверху (снизу) переменной $\sup\limits_{k>n} x_k = +\infty$ ($\inf\limits_{k>n} x_k = -\infty$), и тогда надо считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} (-\infty) = -\infty$).

§ 3.8. Критерий Коши *) существования предела

Пусть переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ стремится к конечному пределу a. Тогда для произвольного положительного числа ε найдется такое N, что

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad (n > N).$$

Пусть n и m будут любыми натуральными числами, большими, чем N. Тогда

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad |x_m - a| < \varepsilon/2 \quad (n, m > N).$$

Отсюда

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получим утверждение:

Если переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет конечный предел, то она удовлетворяет следующему условию, называемому условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех n, $m > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Верно и обратное утверждение:

---

*) О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик. В его трудах впервые определены основные понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл, ...) так, как это принято в современной математике.