стоянии, меньшем, чем ε. Отсюда следует, что какова бы ни была точка $t \in \gamma$, на γ существует на расстоянии (вдоль γ) меньшем, чем ε, точка множества $\mathfrak{M}$. Это показывает, что любая точка $t \in \gamma$ есть предельная точка множества $\mathfrak{M}$.

Из сказанного следует, что каково бы ни было t, всегда можно подобрать подпоследовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, такую, что

$$\lim_{k\to\infty} \sin n_k\alpha = \sin t.$$

Но $\sin t$ пробегает все значения отрезка $[-1, +1]$; отсюда следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sin n\alpha = -1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sin n\alpha = 1.$$

Упражнение. Доказать, что для любой переменной x_n

$$\varlimsup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k, \quad \varliminf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k>n} x_k.$$

Указание. Для неограниченной сверху (снизу) переменной $\sup\limits_{k>n} x_k = +\infty$ ($\inf\limits_{k>n} x_k = -\infty$), и тогда надо считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} (-\infty) = -\infty$).

§ 3.8. Критерий Коши *) существования предела

Пусть переменная x_n ($n = 1, 2, \ldots$) стремится к конечному пределу a. Тогда для произвольного положительного числа ε найдется такое N, что

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad (n > N).$$

Пусть n и m будут любыми натуральными числами, большими, чем N. Тогда

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad |x_m - a| < \varepsilon/2 \quad (n, m > N).$$

Отсюда

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получим утверждение:

Если переменная x_n ($n = 1, 2, \ldots$) имеет конечный предел, то она удовлетворяет следующему условию, называемому условием Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех n, $m > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Верно и обратное утверждение:

---

*) О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик. В его трудах впервые определены основные понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл, ...) так, как это принято в современной математике.

Если переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию Коши, то она стремится к конечному пределу, т. е. существует число a такое, что

$$\lim x_n = a.$$

Докажем это утверждение. Пусть задана переменная x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условию Коши. Положим $\varepsilon = 1$ и подберем N такое, чтобы

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad (n, m > N).$$

Зафиксируем какое-либо $m > N$. Из написанного неравенства следует

$$1 > |x_n - x_m| \geqslant |x_n| - |x_m|,$$

или

$$|x_n| < 1 + |x_m| \qquad (n > N),$$

и переменная x_n ограничена.

Но из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a. \tag{1}$$

Покажем, что тогда последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N такое, чтобы выполнялись неравенства

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \qquad (n, m > N). \tag{2}$$

Подберем также k_0 настолько большое, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2,$$

$n_k > N$ для всех $k > k_0$. Это возможно в силу того, что $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, и в силу (1). Но тогда в неравенстве (2) можно при $k > k_0$ положить $m = n_k$ и будем иметь

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > N).$$

Это доказывает, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a.

Если соединить вместе доказанные прямое и обратное утверждения, то получим следующую теорему, о которой говорят, что она дает критерий Коши существования (конечного) предела.

Теорема. *Для того чтобы переменная* x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *стремилась к (конечному) пределу, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Отметим, что условие Коши можно сформулировать и в следующей форме: *для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $N > 0$, *что*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ *и любых натуральных* p.

§ 3.9. Теорема Вейерштрасса *)

Пусть E есть множество чисел (точек действительной прямой). По определению, точка a называется *предельной точкой* E, если любая ее окрестность, т. е. интервал (c, d), где $c < a < d$, содержит в себе хотя бы одну точку x, принадлежащую E и отличную от a.

На самом деле *любая окрестность* (c, d) *предельной точки* a *содержит в себе бесконечное число точек множества* E *и из них можно выделить бесконечную последовательность различных точек* $x_1, x_2, x_3, \ldots (x_n \neq x_k, n \neq k)$, *сходящуюся к* a. Действительно, по определению, на (c, d) имеется точка $x_1 \in E$, $x_1 \neq a$. Но можно указать интервал (c_1, d_1) длины $d_1 - c_1 < 1$, содержащий a, но не содержащий x_1. На нем, по определению a, должна найтись точка $x_2 \in E$, $x_2 \neq a$. Но снова можно указать интервал (c_2, d_2) длины $d_2 - c_2 < 1/2$, содержащий a, но не содержащий x_1 и x_2, и на нем найти точку $x_3 \in E$, $x_3 \neq a$ и т. д. В результате мы получим нужную последовательность.

Итак, можно дать второе (эквивалентное) определение предельной точки: *точка* a *есть предельная точка множества* E, *если любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек* E.

Множество E' всех предельных точек множества E называется *производным множеством* от E.

Пример 1. Множество E точек последовательности $\{1/n\}$ имеет предельную точку 0.

Действительно, любая окрестность точки 0 содержит в себе бесконечное множество точек нашей последовательности. С другой стороны, если $a \neq 0$, то интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < |a|$, содержит конечное число точек множества E или вовсе не содержит их. Таким образом, единственная предельная точка множества E есть 0.

Таким образом, в данном примере производное множество E' состоит из одной точки 0. При этом она не принадлежит E. Множество E_1, состоящее из 0 и точек вида $1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, очевидно, также имеет 0 своей предельной точкой. Она принадлежит E_1. Таким образом, предельная точка множества E может принадлежать и не принадлежать E.

Пример 2. Множество R всех рациональных чисел имеет в качестве своих предельных точек любую точку действительной оси — рациональную и иррациональную, потому что в любом интервале имеются точки R. Сово-

*) К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.