Теорема. *Для того чтобы переменная* x_n $(n=1, 2, \ldots)$ *стремилась к (конечному) пределу, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Отметим, что условие Коши можно сформулировать и в следующей форме: *для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* $N>0$, *что*

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

для всех $n>N$ *и любых натуральных* p.

§ 3.9. Теорема Вейерштрасса *)

Пусть E есть множество чисел (точек действительной прямой). По определению, точка a называется *предельной точкой* E, если любая ее окрестность, т. е. интервал (c, d), где $c<a<d$, содержит в себе хотя бы одну точку x, принадлежащую E и отличную от a.

На самом деле *любая окрестность* (c, d) *предельной точки* a *содержит в себе бесконечное число точек множества* E *и из них можно выделить бесконечную последовательность различных точек* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(x_n \neq x_k,\ n\neq k)$, *сходящуюся к* a. Действительно, по определению, на (c, d) имеется точка $x_1 \in E$, $x_1\neq a$. Но можно указать интервал (c_1, d_1) длины $d_1-c_1<1$, содержащий a, но не содержащий x_1. На нем, по определению a, должна найтись точка $x_2\in E$, $x_2\neq a$. Но снова можно указать интервал (c_2, d_2) длины $d_2-c_2<1/2$, содержащий a, но не содержащий x_1 и x_2, и на нем найти точку $x_3\in E$, $x_3\neq a$ и т. д. В результате мы получим нужную последовательность.

Итак, можно дать второе (эквивалентное) определение предельной точки: *точка* a *есть предельная точка множества* E, *если любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек* E.

Множество E' всех предельных точек множества E называется *производным множеством* от E.

Пример 1. Множество E точек последовательности $\{1/n\}$ имеет предельную точку 0.

Действительно, любая окрестность точки 0 содержит в себе бесконечное множество точек нашей последовательности. С другой стороны, если $a\neq 0$, то интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где $0<\varepsilon<|a|$, содержит конечное число точек множества E или вовсе не содержит их. Таким образом, единственная предельная точка множества E есть 0.

Таким образом, в данном примере производное множество E' состоит из одной точки 0. При этом она не принадлежит E. Множество E_1, состоящее из 0 и точек вида $1/n$ $(n=1, 2, \ldots)$, очевидно, также имеет 0 своей предельной точкой. Она принадлежит E_1. Таким образом, предельная точка множества E может принадлежать и не принадлежать E.

Пример 2. Множество R всех рациональных чисел имеет в качестве своих предельных точек любую точку действительной оси — рациональную и иррациональную, потому что в любом интервале имеются точки R. Сово-

*) К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

купность предельных точек множества, иррациональных точек x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$, есть, очевидно, отрезок $[0, 1]$.

Множество A, состоящее из конечного числа точек, очевидно, не может иметь предельную точку, т. е. в данном случае A' — пустое множество. Бесконечное неограниченное множество также может не иметь предельной точки, как показывает пример множества натуральных чисел 1, 2, 3... Однако, имеет место

Теорема Вейерштрасса. *Бесконечное ограниченное множество E точек имеет по крайней мере одну предельную точку, т. е. E' — не пустое множество.*

Эта теорема доказана в § 7.9 (теорема 2) в n-мерном случае. Но и сейчас читатель при желании может ее прочитать, имея в виду пока одномерный случай.

§ 3.10. Счетное множество. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел

Множество E элементов x любой природы называется *бесконечным*, если, каково бы ни было натуральное число n, в нем имеется больше, чем n элементов.

E называется *счетным*, если оно *бесконечно* и его элементы можно *перенумеровать*. Это значит, что между (всеми) элементами $x \in E$ и числами натурального ряда

$$\{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1}$$

можно установить взаимно однозначное соответствие. Если при этом элементу $x \in E$ соответствует натуральное число n, то естественно обозначить его через x_n. В результате множество E можно записать в виде *последовательности* элементов:

$$E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{2}$$

В частности, множество (1) натуральных чисел тривиальным образом счетно. Очевидно также, что множество четных натуральных чисел счетно, потому что оно бесконечно и его элементы x можно занумеровать, положив $x_n = 2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть E есть счетное множество, перенумерованное в виде последовательности (2), *и A — непустая его часть. Тогда в A имеется элемент с наименьшим номером.* В самом деле, в (2) имеется элемент $x_n \in A$ с некоторым номером n_1. Элементов $x_n \in A$ с номерами $n \leqslant n_1$ имеется только конечное число; среди них можно выбрать элемент x_{n_0} с наименьшим номером — это и будет, очевидно, элемент A, имеющий самый малый номер в A.

Если E — счетное множество и A — его бесконечная часть, то A — счетное множество, которое можно занумеровать следующим образом: обозначим через z_1 элемент A с наименьшим номером в E; выкидываем из A этот элемент и в оставшемся