Глава 4

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Понятие предела функции

Число A называется *пределом функции f в точке a*, если функция f определена на некоторой окрестности a, т. е. на некотором интервале (c, d), где $c < a < d$, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать зависящее от него $\delta > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x - a| < \delta$, имеет место

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел f в точке a, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \quad (x \to a).$$

Другое определение предела функции в точке может быть высказано в терминах пределов последовательностей.

Число A называется *пределом функции f в точке a*, если она определена на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a и если предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к a и такая, что $x_n \neq a$ для всех n. Таким образом,

$$\lim_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A.$$

Здесь считается, как и в других подобных случаях, само собой разумеющимся, что сходящаяся к a переменная x_n пробегает значения, для которых $f(x)$ определена.

Высказанные определения эквивалентны. В самом деле, пусть функция f имеет предел в смысле первого определения и пусть задана переменная x_n, не равная ни при каком n числу a и стремящаяся к a. Зададим ε и подберем δ так, как это сказано в первом определении. Затем подберем натуральное N так, чтобы $|x_n - a| < \delta$ для $n > N$. Но тогда

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ для } n > N,$$

а это значит, что последовательность чисел $\{f(x_n)\}$ стремится к A, и так как это свойство верно для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, лишь бы $x_n \neq a$ и все x_n принадлежали к области определения функции, то доказано, что из первого определения предела следует второе.

Обратно, пусть функция $f(x)$ имеет предел в смысле второго определения. Допустим, что при этом она не имеет предела в смысле первого определения. Это значит, что существует хотя бы одно ε, которое мы обозначим через ε_0, для которого нельзя подобрать нужное δ, т. е. для *любого* δ среди x, удовлетворяющих соотношениям $0 < |x-a| < \delta$, должен найтись хотя бы один $x = x^{(\delta)}$ такой, что для него $|f(x^{(\delta)}) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

В качестве δ мы берем все числа вида $\delta = 1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и для каждого из них найдем точку $x_k = x^{(\delta)}$, для которой

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k} \; (x_k \neq a)$$

$$|f(x_k) - A| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из этих соотношений видно, что $x_k \to a$ $(x_k \neq a)$, в то время как $f(x_k)$ заведомо не стремится к числу A. Таким образом, допущение, что из второго определения предела не следует первое, приводит к противоречию.

Эквивалентность двух определений доказана.

Выражение *предел функции в точке a* часто заменяют выражением *предел функции при x, стремящемся к a*, или, короче, *предел функции при $x \to a$*. Если угодно, это выражение больше соответствует духу понятия предела потому, что число $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ничего не говорит о значении f в самой точке $x = a$. Функция может не быть определенной в $x = a$. Число A говорит о поведении функции в малой окрестности точки a, из которой выбрасывается точка a. Оно говорит о том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь не равным a, то соответствующее значение $f(x)$ в свою очередь приближается к A, т. е. делается как угодно близким к A.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Она определена для всех $x \neq 2$. Попробуем найти ее предел при $x \to 2$. Для любого $x \neq 2$ $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, а так как при определении предела при $x \to 2$ совсем не принимаются во внимание значения f в точке $x = 2$, то

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2).$$

Это равенство пока написано в том смысле, что если один из пределов существует, то существует и второй и равен ему. Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $(x^2 - 4)/(x - 2)$, достаточно вычислить предел более простой функции $x + 2$. Этот последний при $x \to 2$, очевидно, равен 4. Ведь если подставить в $x + 2$ вместо x произвольную переменную x_n, стремящуюся к 2, то независимо от способа стремления ее к 2

$$\lim_{x_n\to 2}(x_n+2)=2+2=4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+2=4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x)=(x^2-4)/(x-2)$ и $\varphi(x)=x+2$ являются разными функциями. Первая из них определена для $x\neq 2$, в то время как вторая определена для всех x. Однако при вычислении предела функций при $x\to 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x=2$, и так как $f(x)=\varphi(x)$ для $x\neq 2$, то

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\varphi(2).$$

Пример 2. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$, потому что, если $x_n\to 1$, $x_n\neq 1$, то $\lim x_n^2=\lim x_n\lim x_n=1\cdot 1=1$. С другой стороны, этот факт можно доказать на языке ε и δ.

Определим какой-либо интервал, содержащий точку 1, например $(1/2, 3/2)$. Для любого x, принадлежащего ему, очевидно, выполняются неравенства

$$|x^2-1|=|x+1|\,|x-1|\leqslant\frac{5}{2}|x-1|.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{5}\varepsilon\right\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$, будет иметь место соотношение

$$|x^2-1|\leqslant\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\varepsilon=\varepsilon.$$

Пример 3. Функция $\sin(1/x)$ (график ее изображен на рис. 4.1) определена для всех значений $x\neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки $x=0$, за исключением самой точки $x=0$. Эта функция не имеет предела при $x\to 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений

$$x_k=\frac{2}{\pi(2k+1)},$$

$k=0, 1, 2, \ldots$, стремится к нулю и в то же время

$$f(x_k)=(-1)^k$$

не стремится при $k\to\infty$ ни к какому пределу.

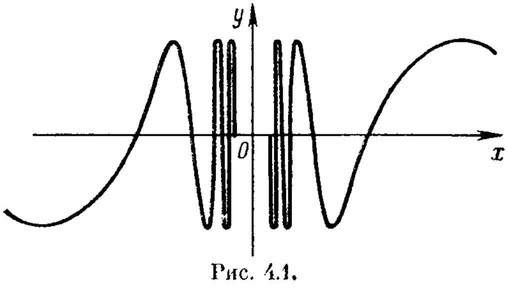

Рис. 4.1.

Введем еще следующее определение. Будем писать

$$A=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

и говорить, что *число A есть предел функции $f(x)$ при x, стре-*

мящемся к бесконечности, если f определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$ при некотором $K > 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $M > K$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$.

Можно доказать, что это определение эквивалентно следующему:

Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если функция $f(x)$ определена для всех x с $|x| > M$ при некотором M и

$$\lim_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$$

для любой сходящейся к ∞ последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство эквивалентности этих двух определений проводится по той же схеме, что и в разобранном выше случае предела f в конечной точке a.

Вообще, многие свойства пределов $f(x)$ при $x \to a$, где a — конечное число, и при $x \to \infty$ являются аналогичными. Можно изложить эти свойства единым образом, так что изложение будет одновременно относиться как к случаю, когда $x \to a$, где a — конечное число, так и к случаю $x \to \infty$. Для этого под буквой a надо понимать либо число (конечное *)) либо символ ∞. Если a есть число, то под окрестностью точки a понимается любой интервал (c, d), содержащий в себе точку a. Таким образом, *окрестность (конечной) точки a* есть множество всех точек x, удовлетворяющих неравенствам $c < x < d$. Если же $a = \infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то под окрестностью a мы условимся понимать множество всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| > M \text{ (или } x > M, \text{ или } x < -M,\ M > 0).$$

Мы будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

где a может быть конечным числом или ∞ (или $+\infty$, или $-\infty$), если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением **), быть может, самой точки a, и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих к ней и отличных от a, имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Это определение объединяет в себе, очевидно, разобранные выше случаи предела f: когда x стремится к конечному числу a и когда x стремится к ∞, $+\infty$, $-\infty$.

---

*) Символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ называют *бесконечными числами;* в таких случаях обычные числа называют *конечными числами.*

**) Эта оговорка нужна только в случае конечной точки (числа) a, Приступим к изложению свойств функции $f(x)$, имеющей пределы при $x \to a$, где a есть число или ∞, $+\infty$, $-\infty$. Условимся произвольную окрестность a называть символом $U(a)$. Легко проверить, что *пересечение двух окрестностей*, $U_1(a)$ *и* $U_2(a)$, *есть снова некоторая окрестность* $U(a)$.

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *где* A — *конечное число, то на некоторой окрестности* $U(a)$ *функция* $f(x)$ *ограничена, т. е. существует положительное число* M *такое, что*

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{для всех } x \in U(a),\ x \neq a.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование окрестности $U(a)$ такой, что

$$1 > |f(x) - A| \geqslant |f(x)| - |A| \qquad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Отсюда для указанных x

$$|f(x)| \leqslant 1 + |A|,$$

где надо считать $M = 1 + |A|$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $A \neq 0$ — *конечное число, то существует окрестность* $U(a)$ *такая, что*

$$|f(x)| > \frac{|A|}{2} \quad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Больше того, для указанных x

$$f(x) > \frac{A}{2}, \quad \text{если } A > 0,$$

и

$$f(x) < \frac{A}{2}, \quad \text{если } A < 0.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование для $\varepsilon = |A|/2$ окрестности $U(a)$ такой, что

$$\frac{|A|}{2} > |A - f(x)| \geqslant |A| - |f(x)| \qquad (x \in U(a),\ x \neq a),$$

откуда $|f(x)| > |A|/2$ для указанных x. Первое из этих неравенств можно заменить следующими:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

При $A > 0$ отсюда следует

$$\frac{A}{2} = A - \frac{|A|}{2} < f(x),$$

а при $A < 0$ следует

$$f(x) < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A_2$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x \neq a$

$$f_1(x) \leqslant f_2(x),$$

то $A_1 \leqslant A_2$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$; тогда для достаточно большого n_0 имеет место неравенство

$$f_1(x_n) \leqslant f_2(x_n) \qquad (n > n_0)$$

и после перехода к пределу неравенство $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = A \tag{1}$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x \neq a$

$$f_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant f_2(x), \tag{2}$$

то

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$; тогда при достаточно большом n_0 для $n > n_0$

$$f_1(x_n) \leqslant \varphi(x_n) \leqslant f_2(x_n),$$

и в силу (1) существует предел $\varphi(x_n)$, равный A, а так как $\{x_n\}$ есть произвольная сходящаяся к a последовательность, то имеет место (3).

Теорема 5 (Критерий Коши существования предела). *Для того чтобы существовал предел (конечный)* $\lim_{x\to a} f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была определена в окрестности* a, *за исключением, быть может, самой точки* a, *и для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовала такая окрестность* $U(a)$, *что каковы бы ни были точки* $x', x'' \in U(a)$, $x', x'' \neq a$,

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, где A — конечное число; тогда существует окрестность a, где $f(x)$ определена, за исключением, быть может, самой точки a. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(a)$, что если $x \in U(a)$, $x \neq a$, то $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Пусть $x', x'' \in U(a)$ и $x', x'' \neq a$; тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получили, что условие теоремы необходимо.

Докажем достаточность этого условия. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и пусть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $U(a)$ такую, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in U(a)$, $x', x'' \neq a$. Зададим произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, стремящуюся к a. Тогда согласно критерию Коши для последовательности, стремящейся к пределу, найдется натуральное N такое, что для $n, m > N$ будет $x_n, x_m \in U(a)$. Но тогда

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \qquad (n, m > N),$$

и последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет предел.

Мы доказали следующее свойство рассматриваемой функции f: для любой сходящейся к a последовательности чисел $x_n \neq a$ существует $\lim f(x_n)$. Из этого свойства автоматически следует, что пределы $\lim f(x_n)$, соответствующие разным сходящимся к a последовательностям, равны между собой. Но тогда существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. В самом деле пусть $x_n \to a$, $x'_n \to a$; $x_n, x'_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда по доказанному, существуют числа A и A' такие, что $f(x_n) \to A$ и $f(x'_n) \to A'$. Составим новую последовательность: $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, \ldots\}$. Она сходится к a. По доказанному выше, должна сходиться к некоторому числу и соответствующая последовательность $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), f(x_3) \ldots\}$. Но это возможно, только если $A = A'$. Таким образом, $A = A'$.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = B,$$

где A и B — конечные числа. Тогда

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B, \qquad \lim [f(x) \cdot \varphi(x)] = AB$$

и при условии, что $B \neq 0$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Докажем для примера второе равенство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$; тогда

$$\lim f(x_n) = A, \quad \lim \varphi(x_n) = B,$$

но так как предел произведения двух переменных, пробегающих последовательности, равен произведению их пределов, то

$$\lim [f(x_n)\varphi(x_n)] = \lim f(x_n) \lim \varphi(x_n) = AB.$$

Это равенство доказано для любой переменной $x_n \to a$, $x_n \neq a$, поэтому $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\varphi(x)] = AB$.

По определению, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого положительного числа M найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, что

$$|f(x)| > M \qquad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и в некоторой окрестности точки a функция $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$), то еще пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

(соответственно $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$).

Легко доказать следующие теоремы:

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет на некоторой окрестности a неравенству*

$$|f(x)| > M > 0,$$

а для функции $\varphi(x)$ имеет место

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 \qquad (\varphi(x) \neq 0 \text{ для } x \neq a),$$

то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Теорема 8. *Если $|f(x)| < M$ в некоторой окрестности точки a и если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Следствие. *Если $\varphi(x) \to 0$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, то*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty,$$

и если $\varphi(x) \to \infty$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

Теорема 9. *Пусть для функции f, определенной в окрестности точки a (конечной или бесконечной), выполняется условие; из всякой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = A$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.*

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Согласно условию любая подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$ содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся к A. Но тогда по теореме 3 § 3.7 $f(x_n) \to A$.